
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ISABELLA TORCICOLLO

Su alcuni problemi di diffusione non lineare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.3, p. 407–411.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_407_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su alcuni problemi di diffusione non lineare.

ISABELLA TORCICOLLO

Le equazioni di tipo parabolico, come è noto, modellano i fenomeni di diffusione. Negli anni passati le equazioni di tipo reazione-diffusione hanno attratto l'attenzione di molti matematici ed altri scienziati. Infatti problemi tipici che sorgono in biologia, chimica o fisica sono modellati da tali equazioni. Il principale obiettivo di tale lavoro è affrontare lo studio di alcuni problemi di diffusione non lineare.

I meccanismi di diffusione non lineare, ben noti in letteratura, sono in molti casi rappresentati dall'equazione

$$(1) \quad u_t = \Delta F(x, u) - g(x, u)$$

dove u denota una "concentrazione" e Δ l'operatore di Laplace. Probabilmente il caso tipico in cui tale equazione interviene è il moto di un gas ideale attraverso un mezzo poroso, con $F = u^m$, $m = \text{costante} > 1$ e u densità del gas.

Con diverse espressioni per la F l'equazione (1) può essere trovata nella teoria delle filtrazioni, in biomatematica in magnetoidrodinamica anisotropa.

Ad esempio il caso $F = (1 + RH^2)u + RHu^2 + \frac{1}{3}Ru^3$ (R costante positiva, H soluzione di una equazione algebrica cubica in x , u campo magnetico) si incontra nella stabilità del moto di Couette-Poiseuille; il caso $F = \lambda(1 - x^2)u + 2 \int_0^x \xi u(\xi) d\xi + \text{costante}$ (essendo λ costante, u la temperatura) si incontra in climatologia; il caso $F = u^m$ (con $m > 1$ e legge Malthusiana per la funzione g) modella la dispersione degli insetti.

Presa in esame la generale equazione (1) si ottengono [1] alcune considerazioni che assicurano che

- a) un insieme è positivamente invariante ($I \subset X$ è positivamente invariante se $v_0 \in I \Rightarrow v(t) \in I \forall t \geq 0$)
- b) la soluzione nulla esiste ed è stabile
- c) le soluzioni stazionarie non costanti se esistono sono instabili.

Un altro fenomeno rilevante, modellato dalla (1) con $g \equiv 0$ e $F = u + \frac{1}{2}\varepsilon_1 u^2 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 u^3$ è la diffusione del calore nel cosiddetto "cold ice". In Glaciologia [3] il ghiaccio a temperatura più bassa del punto di congelamento viene detto "cold ice", mentre il ghiaccio al punto di congelamento (che è essenzialmente una miscela di acqua e ghiaccio) è detto "temperate ice". Il cold ice può essere trovato in molte situazioni: sui laghi e sui mari ghiacciati, sulla vetta delle montagne.

Generalmente la conducibilità termica k non è costante, ma dipende dalla temperatura T . Se però l'intervallo di variazione per T è piccolo, tale dipendenza può essere trascurata e k viene assunta costante. Nel caso del "cold ice", però, in cui la temperatura varia in $[-40^\circ C, 0^\circ C]$, k non può essere considerata costante e in accordo con la relazione empirica di Dillard e Timmerhans's dipende da T nel seguente modo [3]

$$k(T) = (2.1725 - 3.403 \times 10^{-3} T + 9.085 \times 10^{-5} T^2) \text{ Kgms}^{-3} (\text{deg})^{-1}.$$

Di conseguenza l'equazione che governa l'evoluzione della temperatura nel cold ice è fortemente non lineare

$$(2) \quad \varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [k(T) \nabla T]$$

dove la densità ϱ e il calore specifico a pressione costante c_p sono dati da

$$\varrho = 900 \text{ Kg m}^{-3} \quad c_p = 2 \times 10^3 \text{ JKg}^{-1} (\text{°K})^{-1}.$$

Molti problemi rilevanti dipendono dalla risoluzione della suddetta equazione. In particolare, nel contesto dei laghi ghiacciati sorge il problema di determinare la distribuzione della temperatura lungo la lastra di ghiaccio e soprattutto lo spessore, sotto le assegnate condizioni al bordo.

Precisamente, introdotto un sistema di riferimento bidimensionale Oxz , avente asse z verticale discendente e considerato il dominio

$$\Omega(t) = \{(x, z, t) : 0 \leq x \leq \alpha, 0 \leq z \leq l(x, t), t \geq 0\}$$

dove α è una costante positiva assegnata e $l(x, t)$ una funzione positiva incognita, sorge il seguente problema mal posto

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [k(T) \nabla T] & (x, z) \in \tilde{\Omega}(t) \times [0, \mathfrak{T}] \\ T(x, z, 0) = T_0(x, z) & \text{in } \tilde{\Omega}(0) \ (i = 0, 1) \\ T(x_i, 0, t) = \tilde{p}_i + \tilde{h}_i(t) & t \in [0, \mathfrak{T}] \\ \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]_{(x_i, 0, t)} = \tilde{q}_i + \tilde{\delta}_i(t) & t \in [0, \mathfrak{T}] \\ T[x, l(x, t), t] = 0 & (x, t) \in [0, \alpha] \times [0, \mathfrak{T}] \end{cases}$$

dove $\tilde{p}_i, \tilde{q}_i, \tilde{h}_i(t), \tilde{\delta}_i(t)$ sono costanti e funzioni assegnate, $\mathfrak{T}$ una costante positiva e $x_0 = 0, x_1 = \alpha$.

Il problema suddetto descrive la seguente situazione reale. Consideriamo un lago ghiacciato e siano $O = (0, 0)$ ed $A = (\alpha, 0)$ due punti prossimi alla frontiera del lago. Ci si pone [5], [6] il problema di fornire una stima per

lo spessore e la temperatura della lastra di ghiaccio congiungente O ed A , noti temperatura e flusso di calore solo in O ed A .

Va precisato che l'esistenza e la stabilità delle soluzioni, almeno quando il suddetto problema è reso ben posto, è stato affrontato in letteratura [4], anche se soluzioni esplicite non vengono considerate. Il nostro scopo invece è dare un contributo al problema di fornire un'approssimata soluzione esplicita. Motivati dal fatto che, nel contesto della teoria lineare, le variazioni della temperatura lungo la lastra di ghiaccio dovute ad improvvise variazioni della temperatura dell'aria sono molto molto basse [3] (infatti per una lastra spessa 0.5 m la versione lineare della (2) predice che occorrono due giorni affinché il 75 per cento dell'effetto finale di un cambiamento della temperatura sulla superficie penetri i tre quarti dello spessore), il nostro obiettivo è rappresentare la temperatura T e lo spessore l mediante una successione di pochi stati stazionari (U_i, λ_i) ($i = 1, \dots, n$). Precisamente se ε è una costante positiva, lo scopo è mostrare come scegliere una successione crescente di pochi istanti $0 = t_1 < \dots < t_{n+1} = \mathcal{C}$, ($n < \infty$) tali che

$$\begin{cases} |T - U_i| < \varepsilon \\ |l - \lambda_i| < \varepsilon \end{cases} \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (i = 1, \dots, n)$$

U_i, λ_i essendo rispettivamente la temperatura e lo spessore ottenuti risolvendo la versione stazionaria della (2).

Al fine di verificare la validità del modello stimiamo l'errore che si commette quando in un intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ il problema non stazionario è sostituito da quello stazionario provando, per la temperatura, la dipendenza continua in una opportuna norma pesata di L^2 ; riguardo allo spessore confrontiamo i valori stazionari λ_i con quelli ottenuti usando un'equazione (basata sulla legge di Stefan) che descrive la crescita della lastra di ghiaccio. In particolare troviamo che se t_i sono tali che $|T(t_{i+1}) - T(t_i)| \leq 10^\circ C$ allora $\lambda_i = 0.989l(t_i)$. Ne risulta che in intervalli di tipo $[0, \mathcal{C}]$ in cui la variazione di temperatura non superi i $40^\circ C$, la suddivisione di $[0, \mathcal{C}]$ in quattro parti assicura la validità della $\lambda_i = 0.989l(t_i)$ ad ogni istante.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CAPONE F., RIONERO S. e TORCICOLLO I., *On the stability of solutions of the remarkable equation $u_t = \Delta F(x, u) - g(x, u)$* , Rend. Circ. Mat. Palermo, serie II, n. 45 (1996).
- [2] FLAVIN J.N. e RIONERO S., *A free boundary value problem for a nonlinear heat equation* (to appear).
- [3] HUTTER K., *Theoretical Glaciology*, Dordrecht, The Netherlands, D. Reidel, (1983).
- [4] MEIRMANOS ANVARBEK M., *The Stefan problem*, De Gruyter expositions in Math., 3 (1992).

- [5] RIONERO S. e TORCICOLLO I., *On an ill-posed problem in nonlinear heat conduction*, Transport Theory and Statistical Physics, s. 2, **29** n. 12 (2000), 173-186.
- [6] RIONERO S. e TORCICOLLO I., *Estimates for thickness and temperature of a vertical sheet of cold ice*, Proc. IX Conf. Waves and Stability in Cont. media, s. II, n. 57 (1998), 427-432.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli «Federico II»
e-mail: isabella@matna2.dma.unina.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Salvatore Rionero, Università di Napoli «Federico II»