Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Gianluca Occhetta

Raggi estremali di varietà proiettive lisce

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 395–398.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_395_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 395-398

Raggi estremali di varietà proiettive lisce.

GIANLUCA OCCHETTA

Un risultato classico in Geometria Algebrica, che costituisce uno dei più importanti successi della scuola italiana, è stata la classificazione birazionale delle superfici lisce attraverso la teoria dei modelli minimali.

Il primo passo nell'affronto del problema analogo in dimensione tre fu mosso da Mori ([5]), che studiò le varietà tridimensionali con fibrato canonico non numericamente effettivo, cioè le varietà X sulle quali esiste una curva C tale che $K_X . C < 0$; nel seguito chiameremo tali curve «negative» per brevità.

I risultati principali ottenuti da Mori furono il Teorema del Cono ed il Teorema di Contrazione; il primo asserisce che, nel cono delle curve effettive (o più precisamente nella chiusura del cono generato dalle curve effettive nello spazio vettoriale reale degli 1-cicli modulo equivalenza numerica), le curve negative giacciono in una parte poliedrale, i cui raggi sono generati da curve razionali. Il secondo afferma che ogni raggio R (anzi, ogni faccia) di questa parte del cono può essere contratto, cioè esiste una mappa propria a fibre connesse $\varphi : X \to Z$ su una varietà normale, che contrae tutte e sole le curve la cui classe di equivalenza numerica appartiene al raggio. Mappe siffatte sono dette contrazioni estremali o contrazioni di Fano-Mori.

Punti cruciali nelle dimostrazioni di Mori sono l'uso della teoria delle deformazioni di curve su varietà proiettive, e della tecnica, conosciuta come «Bend-and-break», per trovare curve razionali negative, tecnica introdotta in un lavoro precedente ([4]) al fine di dimostrare che lo spazio proiettivo è l'unica varietà liscia il cui fibrato tangente è ampio. Tale tecnica può essere sommariamente riassunta nel modo seguente: se una curva è «sufficientemente» negativa, allora ha una famiglia non banale di deformazioni che tengono fisso un punto e tra le sue deformazioni deve esistere una curva riducibile con almeno una componente razionale. In tal modo Mori mostrò che le fibre delle contrazioni estremali da lui studiate sono coperte da curve razionali, un passo importante verso il risultato finale: una descrizione completa delle contrazioni di varietà lisce di dimensione tre e una rivisitazione nel nuovo linguaggio della teoria classica delle superfici.

La descrizione di Mori costituì il punto di partenza del Programma Minimale, che si proponeva di raggiungere, partendo da una varietà tridimensionale X, attraverso una serie di trasformazioni birazionali una varietà X' il cui fibrato canonico fosse numericamente effettivo, oppure una varietà X' unirigata.

A differenza del caso delle superfici, le trasformazioni birazionali necessarie introducevano in modo ineluttabile delle singolarità, rendendo necessario l'ampliamento della classe di varietà da studiare nell'ambito del programma minimale.

Furono Kollár, Kawamata e Shokurov (vedi, ad esempio [3]) a generalizzare Il Teorema del Cono ed il Teorema di Contrazione a varietà di qualunque dimensione con singolarità terminali; l'approccio di questi autori fu differente, e fece uso di metodi coomologici per superare la difficoltà di generalizzare la teoria della deformazione di curve a varietà singolari. In particolare una varietà di qualunque dimensione, con singolarità buone e il cui fibrato canonico non sia numericamente effettivo, ammette una contrazione di Fano-Mori; una conseguenza del Teorema di Contrazione di Kawamata-Shokurov è che una contrazione di Fano-Mori di una varietà liscia X è data dal sistema lineare associato ad un multiplo di un divisore della forma $K_X + rL$, con L fibrato lineare relativamente ampio ed r intero positivo; diremo che la contrazione è supportata dal divisore $K_X + rL$.

Un passo fondamentale del programma minimale in ogni dimensione è costituito dalla descrizione delle contrazioni di Fano-Mori, e appare ragionevole cominciare lo studio del problema supponendo che la varietà X sia liscia (cfr. [2] per una esauriente esposizione dei più importanti risultati e problemi aperti); in tali ipotesi è ancora possibile utilizzare la teoria della deformazione di curve, studiando le famiglie di curve razionali sulle fibre delle contrazioni; in questo modo Ionescu e Wiśniewski hanno provato una disuguaglianza che mette in relazione la dimensione delle fibre, del luogo eccezionale e della varietà ambiente con il minimo grado anticanonico delle curve nel raggio estremale (tale numero è detto lunghezza del raggio). In particolare, se $\varphi : X \to W$ è una contrazione supportata da $K_X + rL$, $E(\varphi)$ è il suo luogo eccezionale e S' una componente irriducibile di una fibra, si ha che

$$\dim S' \geqslant r + \operatorname{codim}(E(\varphi)) - 1 .$$

Il problema centrale affrontato in questa tesi è lo studio di contrazioni di Fano-Mori di varietà lisce di qualunque dimensione per le quali la disuguaglianza di Ionescu-Wiśniewski sia «vicina» ad essere un'uguaglianza, il caso dell'uguaglianza essendo stato trattato precedentemente da Andreatta, Ballico e Wiśniewski.

Il risultato principale è dato dal seguente

TEOREMA 1. – *Sia $\varphi : X \to W$ una contrazione di Fano-Mori di una varietà liscia, supportata da $K_X + rL$, sia S' una componente di una fibra non banale $F = \varphi^{-1}(w)$, sia S la sua normalizzazione e si denoti ancora con L il pull back di L a S. Se*

$$\dim S \leqslant r + codim\,(E(\varphi))$$

allora il Δ-genere di (S, L) è zero.

Utilizzando tale teorema si possono trovare risultati su contrazioni di tipo fibrato e divisoriale, ma l'applicazione principale è data nell'ambito delle contrazioni piccole, contrazioni cioè che sono un isomorfismo in codimensione 2.

È stato infatti possibile descrivere le componenti irriducibili normali delle fibre di alcune classi di tali contrazioni, in particolare di *tutte le contrazioni piccole di varietà lisce di dimensione cinque*; tale descrizione rappresenta il punto di partenza per uno studio approfondito di tali mappe (fibrato normale, unicità dell'intorno formale, esistenza di flip), svolto in un lavoro di prossima pubblicazione.

Nella successiva parte della tesi si è tentato di generalizzare il teorema 1 (e il precedente risultato di Andreatta, Ballico e Wiśniewski) a contrazioni supportate da divisori della forma $K_X + det\,\mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ fibrato vettoriale ampio sulla varietà X, riuscendo in tale intento a prezzo di assumere singolarità meno pesanti per le fibre:

TEOREMA 2. – *Sia $\varphi : X \to W$ una contrazione di Fano-Mori di una varietà liscia, supportata da $K_X + det\,\mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ fibrato vettoriale di rango r su X, e sia F una fibra di dimensione s con singolarità log terminali. Se*

$$s < r + codim\,(E(\varphi))$$

allora $(F, \mathcal{E}_{|F}) \simeq (\mathbf{P}^s, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(1)^{\oplus r})$, mentre, se

$$s = r + codim\,(E(\varphi))$$

allora $(F, \mathcal{E}_{|F}) \simeq (\mathbf{P}^s, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^s}(1)^{\oplus r})$ o $(F, \mathcal{E}_{|F}) \simeq (\mathbf{Q}^s, \mathcal{O}_{\mathbf{Q}^s}(1)^{\oplus r})$ o F è un $\mathbf{P}^{s-1}$-bundle su una curva razionale liscia e $\mathcal{E}_{|f} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{s-1}}(1)^{\oplus r}$ per ogni fibra della contrazione di $\mathbf{P}$-bundle.

Lo strumento principale utilizzato per provare questi risultati è costituito dall'utilizzo di famiglie di curve razionali non spezzanti, della cui costruzione e delle cui proprietà si è resa necessaria una approfondita comprensione, e a cui è dedicato un capitolo introduttivo, nel quale è presentata anche un'applicazione alla classificazione di varietà di Fano di pseudoindice grande. Particolarmente importante si è mostrato anche l'utilizzo di tecniche di «Bend-and-break», con le quali si è provata l'esistenza di curve razionali «trasverse» sulle fibre di contrazioni di Fano-Mori:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia $\varphi : X \to W$ una contrazione di Fano-Mori di una varietà liscia, e sia F una fibra di φ. Sia $\pi : U \to Z$ un morfismo suriettivo proprio da un aperto denso di F su una varietà quasi proiettiva Z di dimensione positiva.*

Allora, per ogni punto $z \in Z$, esiste una curva razionale su F che taglia $\pi^{-1}(z)$, ma non è contratta da π.

Questo risultato, che può apparire molto tecnico, è stato essenziale nella dimostrazione del Teorema 1, imponendo una forte limitazione alle varietà candidate ad essere fibre di contrazioni di Fano-Mori, e molto probabilmente potrà trovare ulteriori applicazioni in tale ambito di studio.

Contrazioni supportate da divisori della forma $K_X + det\,\mathcal{E}$ nascono in modo naturale considerando coppie $(X, \mathcal{E})$ con X varietà liscia di dimensione n ed $\mathcal{E}$ fibrato vettoriale ampio di rango $r < n$ su X tale che esista una sezione $s \in \Gamma(\mathcal{E})$ il cui luogo degli zeri $Z = (s = 0)$ sia una varietà liscia di dimensione $n - r$ non minimale, che pertanto ammette almeno una contrazione estremale $\varphi : Z \to W$. Lo studio di tali coppie si propone come una generalizzazione del problema classico dello studio di varietà che ammettono varietà speciali tra i loro divisori ampi.

A tale studio è dedicato l'ultimo capitolo della tesi (vedi [1]), nel quale si prova una proprietà generale di sollevamento di contrazioni di Fano-Mori da sezioni di fibrati ampi, (i.e. si trovano estensioni di contrazioni $\varphi : Z \to W$ a contrazioni $\Phi : X \to W$) e se ne danno diverse applicazioni a situazioni particolari. Un esempio dei risultati in tal senso è offerto dal seguente teorema, che stabilisce una forte relazione tra le contrazioni di Fano-Mori di una varietà e quelle di una sua sezione ampia:

TEOREMA 3. – *Sia X una varietà liscia di dimensione n ed $\mathcal{E}$ un fibrato vettoriale ampio di rango $r < n$ su X tale che esista una sezione $s \in \Gamma(\mathcal{E})$ il cui luogo degli zeri $Z = (s = 0)$ sia una varietà liscia di dimensione $n - r \geq 3$ non minimale.*

Allora esiste almeno una contrazione elementare di Fano-Mori $\varphi : Z \to W$ sollevabile a $\Phi : X \to W$.

BIBLIOGRAFIA

[1] MARCO ANDREATTA e GIANLUCA OCCHETTA, *Ample vector bundles with sections vanishing on special varieties,* Internat. J. Math. **10** (1999), 677-696.

[2] MARCO ANDREATTA e JAROSLAW A. WIŚNIEWSKI, *A view on contraction of higher dimensional varieties*, Algebraic Geometry - Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997), 153-183

[3] YUJIRO KAWAMATA, *The cone of curves of algebraic varieties*, Ann. of Math., **119** (1984), 603-633.

[4] SHIGEFUWI MORI, *Projective manifolds with ample tangent bundle* Ann. of Math., **110** (1979), 595-606.

[5] SHIGEFUWI MORI, *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective,* Ann. of Math., **116** (1982), 133-176.

Dipartimento di Matematica «F. Enriques», Università degli Studi di Milano
e-mail: occhetta@mat.unimi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Trento) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Marco Andreatta