Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Simona Mancini

Modelli matematici per la diffusione e il trasporto di particelle cariche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 371–374.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_371_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 371-374

Modelli matematici per la diffusione e il trasporto di particelle cariche.

Simona Mancini

1. – Introduzione.

Questa tesi concerne la risoluzione di problemi di evoluzione derivati dallo studio del moto di particelle cariche e non ([2], [5]). In particolare la tesi è divisa in due argomenti principali: la dimostrazione dell'esistenza e unicità della soluzione di tali problemi per mezzo della teoria dei semigruppi di operatori; la derivazione di un modello di tipo diffusivo a partire da un'equazione cinetica. Tutti i risultati ottenuti sono parte di articoli già pubblicati o sottomessi per la pubblicazione su riviste internazionali.

L'equazione di Vlasov che modellizza il trasporto di particelle di massa m, carica q, contenute in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e soggette ad un campo di forze note F, è la seguente:

$$\partial_t f(x, v, t) + v \cdot \nabla_x f(x, v, t) + a \cdot \nabla_v f(x, v, t) = 0, \tag{1}$$

dove $f(x, v, t)$ rappresenta la densità di particelle che ad un istante $t \geqslant 0$ si trovano in una posizione $x \in \Omega$ con velocità $v \in \mathbb{R}^3$, e $a = -F/m$ è la forza per unità di massa dovuta alla campo di forze agenti sulle particelle.

Dalla fisica dei modelli studiati segue che l'insieme Ω è limitato e convesso; d'altra parte, ponendoci nell'ottica della meccanica classica, la velocità è da considerarsi illimitata $v \in \mathbb{R}^3$. Definendo gli insiemi "entranti" e "uscenti" Γ^- e Γ^+ come segue:

$$\Gamma^- = \{(x, v) : x \in \partial\Omega,\ v \in \mathbb{R}^3,\ \nu(x) \cdot v < 0\},$$

$$\Gamma^+ = \{(x, v) : x \in \partial\Omega,\ v \in \mathbb{R}^3,\ \nu(x) \cdot v > 0\},$$

dove $\nu(x)$ è la normale esterna a $\partial\Omega$ in x, si possono introdurre le tracce della funzione f su $\Gamma^\pm$, $f^\pm = f|_{\Gamma^\pm}$, e scrivere le condizioni al contorno da associare all'equazione di Vlasov:

$$f^- = \Lambda f^+ + q, \tag{2}$$

dove $q = q(x, v)$ è una sorgente di particelle al bordo e Λ è un operatore lineare che mette in relazione il flusso di particelle uscenti ed entranti; per esempio Λ può rappresentare la riflessione speculare delle particelle al bordo.

Infine, il modello evolutivo (1), (2) è completato dalla la condizione iniziale:

$$f(x, v, 0) = f_0(x, v), \tag{3}$$

2. – Il problema astratto e la generazione di semigruppi.

In un primo momento, abbiamo studiato l'esistaenza e unicità della soluzione del problema evolutivo (1)-(3) considerando un modello unidimensionale: $x \in \Omega = [-b, +b]$ e $v \in \mathbb{R}$.

La teoria dei semigruppi di operatori lineari e affini (vedere [1] e [6]) afferma che: trovare la soluzione del problema di evoluzione (1)-(3) equivale a trovare la soluzoine del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{df(t)}{dt} = Af(t), \quad t \geq 0 \\ f(0) = f_0 \in D(A) \end{cases} \tag{4}$$

dove ora $f(t) = f(\cdot, \cdot, t)$ è una funzione da $[O, +\infty)$ a valori in uno spazio di Banach X, e l'operatore "affine" A è definito da:

$$Af = -v\partial_x f - a\partial_v f \tag{5}$$

$$D(A) = \{ f \in X, \ v\partial_x f \in X, \ a\partial_v f \in X, \ f^- = \Lambda f^+ + q \}. \tag{6}$$

Come spazio di Banach abbiamo scelto lo spazio $X = L^1(\Omega \times \mathbb{R})$, poichè fisicamente la norma della densità f in tale spazio dà il numero di particelle presenti al tempo t nella regione considerata.

Inoltre, considerando l'operatore lineare L associato all'operatore affine A:

$$Lf = -v\partial_x f - a\partial_v f \tag{7}$$

$$D(L) = \{ f \in X, \ v\partial_x f \in X, \ a\partial_v f \in X, \ f^- = \Lambda f^+ \}, \tag{8}$$

l'esistenza e unicità della soluzione del problema (4) è ricondotta alla generazione di semigruppo per l'operatore lineare L (vedere [1]).

I problemi principali affrontati per lo studio della generazione di semigruppo per l'operatore lineare L sono dovuti al fatto che le velocità sono illimitate, $v \in \mathbb{R}$, e alla natura delle condizioni al contorno. Per quanto riguarda i tipi di condizioni al contorno classicamente più studiate, abbiamo dimostarto, tramite la teoria dei semigruppi, il seguente:

TEOREMA 1. – *Se vale una delle seguenti:*

(*i*) $\Lambda = 0$ (*condizioni di non-rientro*);

(*ii*) $\|\Lambda\| \leq 1$ (*condizioni dissipative o conservative*);

allora la chiusura $\overline{L}$ *dell'operatore* L *genera un semigruppo fortemente continuo di contrazione in* X.

Tali risultati erano già stati dimostrati per mezzo della teoria delle caratteristiche da Greenberg, Van der Mee e Protopopescu in [4]; ma non era stata data la forma esplicita della soluzione del problema non-omogeneo (4), che invece noi abbiamo stabilito grazie alla teoria dei semigruppi affini.

Se le condizioni al contorno sono di tipo moltiplicante, $\|\Lambda\| \geq \alpha > 1$, è necessario sommare un termine di assorbimento all'equazione di Vlasov per evitare un'esplosione del dispositivo studiato (le particelle confinate in una regione limitata aumenterebbero incodizionatamente). Grazie alla teoria dei semigruppi integrati, si è dimostrato il seguente:

TEOREMA 2. – *Se vale una delle seguenti:*
(*i*) $\|\Lambda\| \leq 1$;
(*ii*) $\|\Lambda\| > 1$ *e* $\sigma > \ln \|\Lambda\|/2b$; *(*$\sigma$ *è la sezione d'assorbimento)*
allora l'operatore:

$$L_1 f = -v \partial_x f - \sigma |v| f \tag{9}$$

$$D(L_1) = \{ f \in X,\ v\partial_x f \in X,\ \sigma |v| f \in X,\ f^- = \Lambda f^+ \}, \tag{10}$$

genera un semigruppo integrato e positivo.

Tale risultato ci ha indotti a pensare che nel caso moltiplicante non ci sia generazione di semigruppi fortemente continui.

3. – Diffusione generata da collisioni. Applicazione ai motori ionici.

La seconda parte della tesi, svolta in collaborazione con l'Università P.Sabatier di Tolosa, riguarda la derivazione rigorosa di un modello di tipo diffusivo (SHE-model) a partire da un'equazione cinetica per la simulazione numerica dei motori ionici ([3]). È stato studiato il moto degli elettroni contenuti tra due piani (paralleli e molto vicini tra loro), soggetti ad un campo elettro-magnetico incrociato e ad interazioni con il bordo della regione considerata (i piani). In un primo momento le collisioni ioni-elettroni sono state trascurate, ma la derivazione del modello di tipo diffusivo nel caso collisionale segue gli stessi passi che nel caso senza collisioni.

Il fatto che la distanza tra i piani sia molto piccola rispetto alle loro dimensioni permette d'introdurre un parametro $\alpha \ll 1$ e di adimensionalizzare l'equazione e la funzione densità, ottenendo la seguente equazione di Vlasov:

$$\alpha^2 \partial_t f^\alpha + \alpha(\underline{v} \cdot \partial_\xi f^\alpha - \underline{E} \cdot \partial_{\underline{v}} f^\alpha) + v_x \partial_x f^\alpha - (\underline{v} \times B) \cdot \nabla_{\underline{v}} f^\alpha + \lambda f^\alpha = \lambda [f^\alpha], \tag{11}$$

dove $f^\alpha = f^\alpha(x, \xi, v_x, \underline{v}, t)$ rappresenta la densità di elettroni presenti al tempo $t > 0$ nella posizione $(x, \xi) = (x, y, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2$ e con velocità $v = (v_x, \underline{v}) \in \mathbb{R}^3$ (qui e in seguito la sottolineatura indica le componenti y, z di un vettore). Inoltre, data $v = |v| \omega$, $\omega \in S^2$:

$$\lambda = \int_{S^2} \phi(\omega \to \omega')\, d\omega', \qquad [f^\alpha] = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \phi(\omega \to \omega')\, f^\alpha(x, \xi, |v|, \omega')\, d\omega'$$

con $\phi(\omega \to \omega')$ nucleo di scattering.

All'equazione di Vlasov (11) vengono accoppiate una condizione iniziale

$$f^\alpha(x, \xi, v, 0) = f_0^\alpha(x, \xi, v) \tag{12}$$

e delle condizioni al contorno di tipo conservativo date da una combinazione convessa di riflessione e diffusione degli elettroni al bordo:

$$(f^\alpha)^- = \mathcal{B}(f^\alpha)^+ = \beta J (f^\alpha)^+ + (1-\beta)\, \mathcal{K}(f^\alpha)^+, \tag{13}$$

dove $0 \leq \beta < 1$ è il coefficiente di accomodazione, J è l'operatore di riflessione speculare e $\mathcal{K}$ è l'operatore integrale di diffusione (vedere [3] per la modellizzazione). Sotto opportune ipotesi sui dati del problema, abbiamo dimostrato il seguente:

TEOREMA 3. – *Quando α tende a 0 la soluzione f^α del problema* (11)-(13) *converge ad una funzione $F(\xi, |v|, t)$ indipendente dalla posizione x e dalla direzione della velocità $\omega \in S^2$. Inoltre, F è soluzione nel senso delle distribuzioni del problema di tipo diffusivo:*

$$\begin{cases} 4\pi\sqrt{2\varepsilon}\partial_t F + (\nabla_\xi - \underline{E}\,\partial_\varepsilon)\cdot J = 0 \\ J = -\mathbb{D}(\nabla_\xi - \underline{E}\,\partial_\varepsilon)\,F \\ F(0) = F_0 \end{cases} \tag{14}$$

dove $\varepsilon = |v|^2/2$ e $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\xi, \varepsilon)$ è il tensore di diffusione dato da:

$$\mathbb{D}_{i,j} = (2\varepsilon)^{3/2}\int_0^1 \int_2 D_i\,\omega_j\,dx\,d\omega, \qquad i, j = y, z \tag{15}$$

e D_i, $i = y, z$ è soluzione del problema stazionario:

$$\begin{cases} -v_x\,\partial_x D_i + (v \times B)\cdot\nabla_{\underline{v}} D_i + \lambda D_i = \lambda[D_i] + \omega_i \\ D_i^+ = \mathcal{B}^* D_i^- \end{cases} \tag{16}$$

a meno di una costante additiva rispetto a x e ω.

I passi principali della dimostrazione sono i seguenti: prova dell'esistenza e uncità della soluzione di (11)-(13), stime a priori, risoluzione del problema stazionario (16), passaggio al limite nella formulazione debole del problema. I problemi maggiori affrontati sono stati trovati al primo e terzo passo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BELLENI-MORANTE A. e MC BRIDE A., *Applied nonlinear semigroups,* John Wiley & Sons, Chirchester (1998).

[2] CERCIGNANI C., *The Boltzmann equation and its applications,* Springer, New York (1988).

[3] DEGOND P., *A model of near-wall conductivity and its application to plasma thrusters,* SIAM J. Apll. Math., 58 (1998), 1138-1162.

[4] GREENBERG W., VAN DER MEE C. e PROTOPOPESCU V., *Boundary value problems in abstract kinetic theory,* Birkauser Verlag (1987).

[5] MARKOWICH P., RINGHOFER C.A.e SCHMEISER C., *Semiconductor equations,* Springer Verlag (1994).

[6] PAZY A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* Springer, New York (1983).

Via Govi 23, 21100 Varese, ITALIA
e-mail: smancini@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. A. Belleni-Morante, Università di Firenze