Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Sandra Lucente

Teoremi di esistenza globale per equazioni semilineari di tipo onda

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 363–366.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_363_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 363-366

Teoremi di esistenza globale per equazioni semilineari di tipo onda.

SANDRA LUCENTE

Lo scopo della tesi è studiare alcuni problemi di Cauchy in cui l'operatore lineare coinvolto è di tipo operatore delle onde e la nonlinearità è polinomiale. Vi è un'ampia letteratura su tali problemi, il cui significato fisico è da ricercarsi nello studio dei fenomeni quantistici relativistici (vedi [4]).

In generale, se P è un operatore iperbolico del secondo ordine, diremo che il problema

$$\begin{cases} Pu(x, t) = f(u(x, t)), \qquad |f(u)| \simeq |u|^p, \ x \in \mathbf{R}, \ t \geqslant 0 \\ u(x, 0) = u_0, \qquad u_t(x, 0) = u_1 \end{cases}$$

ha *soluzione globale* se la soluzione u è definita su $\mathbf{R}^n \times [0, +\infty[$ ovvero è globale nel tempo. Il comportamento della soluzione è governato dal termine nonlineare:

(i) per dati iniziali piccoli la nonlineraità agisce per $|u| \to 0$

(ii) per dati iniziali grandi la nonlinearità agisce per $|u| \to \infty$.

Se considera il caso di dati iniziali piccoli, in corrispondenza dall'operatore P scelto esiste un *esponente critico*, qui denotato con p_c, tale che vi è soluzione globale per p più grande di p_c ed esplosione della soluzione per p più piccolo di p_c:

Equazione in $u(x, t)$, $x \in \mathbf{R}^n$	Esistenza globale
$u_{tt} - \Delta u = \pm |u|^p$	$p > p_c > 0$ $(n-1)\, p_c^2 - (n+1)\, p_c - 2 = 0$
$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = \pm |u|^p$	$p > 1 + 2/n$
$u_{tt} - \Delta u = \pm |Du|^p$	$p > 1 + 2/(n-1)$

Per l'operatore delle onde con dati grandi invece l'esponente critico è

$$p_c = (n+2)/(n-2)$$

ed è stata provata l'esistenza di una soluzione globale per valori sottocritici ed anche per p critico se $n \leqslant 9$, resta aperto il caso sovracritico (vedi [9]).

In tutte le dimostrazioni sono coinvolte stime a priori della soluzione in opportuni spazi di Sobolev o di Besov con peso (vedi [10]). In questa tesi tale tecnica è applicata a tre equazioni di tipo onda.

1. – Equazione semilineare di Klein-Gordon.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - \Delta)\, u + m^2 u = f(u), \qquad f(u) = O(|u|^p) \text{ se } |u| \to 0, \\ u(x,\,0) = u_0, \qquad u_t(x,\,0) = u_1. \end{cases}$$

con dati piccoli. Come si è detto, se f è regolare, i risultati in letteratura danno soluzione globale per $p > 1 + 2/n$. Inoltre è noto che la soluzione di

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - \Delta)\, v + m^2 v = 0, \\ v(x,\,0) = v_0, \qquad v_t(x,\,0) = v_1 \end{cases}$$

verifica la stima di decadimento

$$\|v(t)\|_\infty \leq C(1+t)^{-n/2}.$$

In questa tesi abbiamo dimostrato che il problema nonlineare considerato ammette un'unica soluzione globale anche nel caso f non regolare. Tenendo presente che la nonlinearità accentua il decadimento della soluzione, abbiamo inoltre dimostrato che anche la soluzione del problema nonlineare decade come $t^{-n/2}$ (vedi [3]).

Il risultato è basato sull'uso degli spazi di Sobolev sull'iperboloide $\{t^2 - |x|^2 = 1\}$. Mediante proiezione sull'iperpiano $t = 0$, lo studio di questi spazi si riconduce allo studio degli spazi $H^{s,\,\delta}(\mathbf{R}^n)$ introdotti in [1] per s intero e qui generalizzati nel caso frazionario per poter trattare con nonlinearità non regolari. Nel caso intero la norma in questi spazi è data da

$$\|f\|_{H^{s,\,\delta}} = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\langle x \rangle^{|\alpha| + \delta} D^\alpha f\|_2,$$

dove $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$. Per s frazionario la norma si ricava mediante una $\{\phi_j\}$ partizione dell'unità di tipo Paley-Littlewood:

$$\|f\|_{H^{s,\,\delta}} \simeq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\delta + n/2)} \|\phi_j(2^j \cdot)\, f(2^j \cdot)\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}.$$

Un'analisi dettagliata di tali spazi è data in [2]; in particolare sussiste la seguente immersione in L^∞:

$$\langle x \rangle^{n/2 + \delta} \|f\|_\infty \leq \|f\|_{H^{s,\,\delta}}.$$

Il coefficiente $\langle x \rangle^{n/2}$ è cruciale nella dimostrazione della stima di decadimento per la soluzione del problema nonlineare.

2. – Un'equazione semilineare pseudo-differenziale.

Il secondo problema per cui abbiamo provato l'esistenza di una soluzione globale è il seguente:

$$\begin{cases} u_t - i\lambda(D)\, u = f(u) & x \in \mathbf{R}^n \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Qui $\lambda(D)$ è di tipo convoluzione, cioè $\lambda(D)\, g(x) = (\lambda(\xi)\, \widehat{g}(\xi))^{\wedge}$ con simbolo reale λ, omogeneo di grado uno i cui sottolivelli soddisfano opportune ipotesi di convessità. La nonlinearità è sempre di tipo

$$f(u) = O(|u|^p) \quad \text{vicino} \quad u = 0$$

e i dati iniziali sono scelti piccoli.

La stima cruciale per trovare la soluzione globale, con p sufficientemente grande, è la seguente stima di tipo von-Wahl.

TEOREMA 1 (vedi [7]). – *Sia* $\lambda(\xi) \leq 0$ *un simbolo omogeneo di grado uno tale che* $\{\lambda(\xi) = 1\}$ *sia strettamente convesso e compatto. Assegnata* $v_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, *la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} v_t - i\lambda(D)\, v = 0, \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases}$$

verifica la seguente stima di decadimento:

$$\|v(t)\|_\infty \leq Ct^{-\frac{n-1}{2}} \|v_0\|_{W^{[n/2]+h,1}} \qquad \forall t \geq 1\,.$$

ove $h = 1$ *per* n *pari e* $h = 2$ *per* n *dispari.*

In seguito a tale stima si può congetturare che l'esponente critico per tale equazione sarà $p_c = 1 + 2/(n-1)$ ovvero lo stesso esponente critico dell'equazione $u_{tt} - \Delta u = \pm |Du|^p$. Ciò è dovuto alla possibilità di rappresentare l'operatore delle onde come composizione di operatori pseudo-differenziali: $\partial_{tt} - \Delta = (\partial_t - i\sqrt{-\Delta})(\partial_t - i\sqrt{-\Delta})$. L'idea per la futura ricerca è l'utilizzo di tali equazioni pseudo-differenziali per lo studio di sistemi quasilineari del primo ordine.

3. – Equazione semilineare delle onde con potenziale.

Infine si è cercata la soluzione globale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - \Delta)\, u = -V(x)\, f(u), & f(u) = u|u|^{p-1} \;\; se \;\; |u| \to \infty\,, \\ u(x, 0) = u_0, & u_t(x, 0) = u_1 \end{cases}$$

senza l'ipotesi di piccolezza dei dati. Il risultato classico di Shatah e Struwe per

$V(x) = costante$ dà la soluzione globale quando $p \leqslant (n+2)/(n-2)$ ed $n \leqslant 7$. Qui si estende tale risultato considerando $V(x) > 0$ oppure $V(x) = |x|^2$. In particolare in questo secondo caso lo zero del potenziale potrebbe interagire con l'eventuale esplosione della soluzione. Per analizzare tale fenomeno si studiano nuove stime pesate in spazi di Besov da combinarsi com la classica stima di Strichartz (vedi [6]).

Infine se $n = 3$, utilizzando la rappresentazione esplicita della soluzione, per $p > 5$ si ottiene la soluzione globale del problema in oggetto qualunque sia il potenziale $V(x) \geqslant 0$. Nel caso critico $p = 5$ per potenziali che si annullano si dimostra esistenza globale solo in corrispondenza di dati che soddisfano una particolare stima dell'energia iniziale (vedi [5], [8]).

BIBLIOGRAFIA

[1] CHOQUET-BRUHAT Y., CHRISTODOULOU D., *Elliptic Systems in $H_{s,\delta}$ Spaces on Manifold which are Euclidean at Infinity*, Acta Math., **146** (1981), 129-150.

[2] D'ANCONA P., GEORGIEV V., KUBO H., *L^q Weighted Decay Estimate for Wave Equation,* preprint Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza».

[3] GEORGIEV V., LUCENTE S., *Weighted Sobolev Spaces applied to Nonlinear Klein-Gordon Equation,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **329** (1999), 21-26.

[4] HÖRMANDER L., *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations,* Mathematiques et Applications, **26**, Springer, Berlin (1997).

[5] LUCENTE S., *Nonlinear Wave Equation with Vanishing Potential,* Serdica Math. J., **25** (1999), 71-82.

[6] LUCENTE S., *Nonlinear Wave Equation with Potential*, in corso di stampa su, Tsukuba J. Math.

[7] LUCENTE S., ZILIOTTI G., *A decay estimate for a class of hyperbolic pseudo-differential equations,* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Math. Appl., **10** (1999.

[8] RAUCH J., *The u^5 Klein-Gordon Equations,* Non linear PDE's and Applications, Pitman Research Notes in Math., **53** (1981), 335-364.

[9] SHATAH J., STRUWE M., *Regularity Result for Nonlinear Wave Equation,* Ann. Math., **138** (1993), 503-518.

[10] TRIEBEL H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North Holland Co., Amsterdam* (1978).

Dipartimento di Matematica, Università della Basilicata
lucente@pzmath.unibas.it
Dottorato in matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo XI
Direttori di ricerca: Prof. Vladimir Georgiev, Prof. Sergio Spagnolo