

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

CLAUDIO GENTILE

## Problemi strutturati a blocchi con variabili intere: casi teorici e applicazione ad un problema reale

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La  
Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.3, p. 347–349.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2000\\_8\\_3A\\_3\\_347\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_347_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## **Problemi strutturati a blocchi con variabili intere: casi teorici e applicazione ad un problema reale.**

CLAUDIO GENTILE

L'argomento di questa tesi di dottorato è lo studio dei problemi di programmazione lineare intera (PLI) con formulazione strutturata a blocchi mediante metodi di programmazione matematica, analisi convessa e combinatorica poliedrale.

Uno dei principali problemi nella combinatorica poliedrale è quello di determinare disuguaglianze che descrivono facce dell'involuppo convesso di un insieme di punti a coordinate intere che rispettano un sistema di vincoli lineari (detto «formulazione lineare intera» del problema). Le disuguaglianze che definiscono facce di dimensione massimale forniscono un sistema minimo non ridondante per la descrizione dell'involuppo convesso, e quindi rivestono una particolare importanza.

La formulazione di un problema di PLI ha una struttura a blocchi quando i vincoli della formulazione lineare intera possono essere partizionati in  $K + 1$  gruppi, di cui  $K$  (chiamati *blocchi*) sono definiti su  $K$  insiemi disgiunti di variabili. I vincoli nell'ultimo gruppo contengono variabili di tutti i blocchi.

Nella tesi, composta di tre parti, si discutono aspetti strutturali e computazionali dei problemi a blocchi e si presenta un'applicazione ad un problema reale di schedulazione di navi per la distribuzione di prodotti petroliferi.

Nella prima parte vengono studiate alcune proprietà poliedrali generali valide per ampie classi di problemi. In particolare, si considera la proprietà di estendere le disuguaglianze che inducono facce massimali dei poliedri definiti dall'involuppo convesso delle soluzioni intere dei singoli blocchi di vincoli mediante coefficienti nulli (zero-lifting). Si dimostra che esistono casi in cui la proprietà di indurre una faccia massimale non viene mantenuta nel problema completo e classi di problemi per cui tale proprietà rimane valida per tutte le disuguaglianze non banali che definiscono facce massimali per i singoli blocchi. I risultati ottenuti estendono quelli presenti in letteratura su problemi specifici, quali il problema degli zaini multipli (si veda [2]), fornendo una visione di insieme e un approccio generale per verificare la validità della suddetta proprietà.

Viene poi studiato un caso particolare di problema strutturato a blocchi, il *Problema dei Matchings Perfetti Disgiunti*. Per tale problema viene descritta l'applicazione dei risultati generali sopra citati. Si descrivono, quindi, due procedure di lifting di tipo generale applicabili a disuguaglianze valide anche per il problema dei matchings disgiunti (che si ha quando non si richiede la condizione di «perfezione») nel caso di soli due blocchi. La prima considera la proprietà di zero-lifting riguardante disuguaglianze con coefficienti diversi da zero su entrambi i

blocchi. La seconda fornisce un ulteriore modo di effettuare lifting su un tipo particolare di disuguaglianze chiamate *disuguaglianze rango con una giunzione*. Infine, si presentano diverse classi di disuguaglianze valide su cui è possibile applicare le procedure precedenti.

Nella seconda parte viene discusso un aspetto computazionale dei problemi a blocchi a variabili intere. Per la risoluzione di problemi di grandi dimensioni, come spesso risultano essere i problemi a blocchi, si utilizzano metodi di decomposizione per determinare più velocemente la soluzione del rilassamento continuo (il problema di programmazione lineare dove si elimina la condizione di interezza delle variabili) e sfruttare più efficacemente la struttura del problema. Uno di tali metodi utilizza la tecnica di *Column Generation* [1], che consiste nell'estendere lo spazio delle variabili, con l'aggiunta delle relative colonne nella matrice del sistema, mediante opportuni algoritmi di generazione. Per la risoluzione di problemi a variabili intere, il metodo più utilizzato è il *Branch & Cut* [4], che permette di risolvere problemi di dimensioni anche elevate, sfruttando la conoscenza della struttura poliedrale dell'involuppo convesso delle soluzioni ammissibili. Il Branch & Cut alterna fasi in cui la regione delle soluzioni ammissibili del problema viene suddivisa in più sottoinsiemi (branching), a fasi in cui vengono aggiunti al problema nuove disuguaglianze (dette tagli) utili per dare una descrizione migliore dell'involuppo convesso delle soluzioni intere. L'aggiunta di disuguaglianze valide, quando il rilassamento continuo viene risolto tramite Column Generation, può rendere difficile il problema della generazione di colonne. La combinazione delle due tecniche descritte è in generale molto complessa, tanto è vero che in letteratura non si trovano esempi di impiego di Column Generation combinato con la generazione di tagli. Si propone, quindi, un metodo per integrare il Branch & Cut con la Column Generation basato sull'utilizzo contemporaneo di due formulazioni del problema: la prima viene impiegata per identificare disuguaglianze valide e regole di branching, mentre la seconda viene utilizzata per determinare soluzioni del rilassamento. Mediante le regole studiate si trasformano le soluzioni ottenute con la seconda formulazione in soluzioni per la prima formulazione; qui vengono identificati tagli violati, che tramite opportune regole di trasformazione, vengono aggiunti alla seconda formulazione per eliminare la soluzione frazionaria precedente.

Infine, si discute un'applicazione nel settore della distribuzione primaria dei prodotti petroliferi via nave. Per tale problema si forniscono formulazioni di programmazione intera e di programmazione intera mista, e si considerano anche formulazioni alternative al fine di applicare la tecnica per la combinazione della Column Generation e del Branch & Cut sopra richiamata. Come risultato dello studio di tale problema, sono state derivate nuove classi di disuguaglianze valide e nuovi risultati per la programmazione intera mista.

Sono discusse alcune regole di branching appositamente studiate per il problema della schedulazione di navi e vengono mostrati alcuni risultati sperimentali ottenuti su casi test e su un caso reale forniti da compagnie petrolifere e da socie-

tà che operano nel settore della logistica di prodotti petroliferi. Per questi casi test si sono ottenute schedulazioni che corrispondono a risparmi sui costi fino al 20% rispetto a quelle utilizzate dalle società petrolifere.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] DANTZIG G.B. e WOLFE P., *Decomposition Principle for Linear Programs*, Operations Research, 8 (1960), 101-111.
- [2] GOTTLIEB E.S. e RAO M.R., *The Generalized Assignment Problem: Valid Inequalities and Facets*, Mathematical Programming, 46 (1990), 31-52.
- [3] NEMHAUSER G.L. e WOLSEY L.A., *Integer and Combinatorial Programming*, Wiley, New York (1988).
- [4] PADBERG M.W. e RINALDI G., *A Branch and Cut Algorithm for Resolution fo Large Scale Symmetric Salesman Problems*, SIAM Review, 33 (1991), 60-100.

Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica, Consiglio Nazionale delle Ricerche  
(IASI-CNR), Viale Manzoni, 30 - 00185 Roma

e-mail: gentile@iasi.rm.cnr.it

Dottorato in Ricerca Operativa

(sede amministrativa: Università «La Sapienza» Roma) - Cielo XI

Direttore di ricerca: Dott. Giovanni Rinaldi, IASI-CNR