Bollettino
Unione Matematica Italiana
Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Flaminio Flamini

Famiglie di curve nodali su superfici proiettive

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 343–347.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_343_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 343-346

Famiglie di curve nodali su superfici proiettive.

FLAMINIO FLAMINI

1 – Introduzione.

Nella tesi di Dottorato sono state studiate alcune fondamentali proprietà di schemi algebrici che parametrizzano curve ridotte, irriducibili e nodali (i.e. dotate di punti doppi ordinari come uniche singolarità) su una superficie algebrica. Nel seguito si supporrà che le varietà algebriche considerate siano definite su $\mathbf{C}$, il campo dei numeri complessi. Per *superficie* si intenderà sempre una superficie algebrica proiettiva, non-singolare ed irriducibile. Il simbolo $\sim$ denoterà l'equivalenza lineare di divisori, K_S denoterà sempre un divisore canonico di una superficie S.

Ricordiamo che nel 1921 Severi ([5]) fornisce una descrizione quasi completa delle varietà $V_{d,\delta}$ che parametrizzano famiglie di curve piane di grado d, irriducibili e δ-nodali. Tali varietà possono essere definite piú in generale.

DEFINIZIONE 1. – *Sia S una superficie e sia $D \in Div(S)$ un divisore effettivo per cui il sistema lineare completo $|D|$ abbia elemento generico liscio ed irriducibile. Posto $p_a(D) := \frac{D(D+K_S)}{2} + 1$, il genere aritmetico di D, per ogni intero $0 \leqslant \delta \leqslant p_a(D)$ $V_{|D|,\delta}$ denota il sottoschema localmente chiuso di $|D|$ che, se non vuoto, parametrizza una famiglia (universale) di curve ridotte, irriducibili e δ-nodali in $|D|$ ed è denominato* varietà di Severi *di curve irriducibili e δ-nodali in $|D|$.*

È usuale denotare con $[X]$ il punto di $V_{|D|,\delta}$ corrispondente ad una curva $X \sim D$, su S, irriducibile e δ-nodale.

Le problematiche relative alle varietà $V_{|D|,\delta}$ sono di varia natura ed, ovviamente, le risposte dipendono dalla scelta di S, di $|D|$ e di δ. Questo dà conto della vastissima produzione letteraria, anche recente, che in certi casi, tuttavia, fornisce risposte solo parziali per talune di queste problematiche.

Oggetto della nostra ricerca è stato lo studio di questioni relative alla non-singolarità ed alla determinazione della dimensione di queste varietà nonché al comportamento, dal punto di vista dei moduli, degli elementi che esse parametrizzano. In particolare, ci siamo interessati a varietà di Severi su superfici di tipo generale dato che tali superfici appartengono ad una di quelle classi per cui tali problematiche sono maggiormente ricche di questioni aperte. In § 3 riportiamo i principali risultati originali contenuti nella tesi di Dottorato.

Concludiamo questa breve introduzione ricordando alcune definizioni generali, utilizzate in seguito, relative a varietà di Severi su una superficie S.

DEFINIZIONE 2. – *Un punto $[X]$ di una varietà di Severi $V_{|D|,\delta}$ è detto* regolare *se:*

(i) $[X]$ *è un punto liscio di* $V_{|D|,\,\delta}$,

(ii) $dim(V_{|D|,\,\delta})_{[X]} = dim(|D|) - \delta$ (*detta* dimensione attesa).

Se $[X] \in V_{|D|,\,\delta}$, la normalizzazione di X è una curva liscia, che denotiamo con C, di genere $g = p_a(D) - \delta$; d'ora in poi assumiamo $g \geqslant 2$.

Sia $\mathcal{M}_g$ lo spazio dei moduli di curve (lisce) di genere g. Per ogni $\delta \geqslant 0$ ammissibile, consideriamo il morfismo (funtorialmente definito)

$$\pi_{|D|,\,\delta} \colon V_{|D|,\,\delta} \to \mathcal{M}_g$$

che manda $[X] \in V_{|D|,\,\delta}$ nella classe di isomorfismo di C.

DEFINIZIONE 3. – *Il* numero di moduli *di* $V_{|D|,\,\delta}$ *è* $\nu_{D,\,\delta} := dim(Im(\pi_{|D|,\,\delta}))$.

2 – Varietà di Severi nel piano.

In questo paragrafo ricordiamo brevemente i risultati maggiormente noti nel caso di varietà di Severi in $\mathbf{P}^2$, alcuni dei quali sono all'origine della nostra ricerca. In primo luogo, abbiamo:

Per ogni $d \geqslant 3$ *e* $0 \leqslant \delta \leqslant p_a(d) = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$:

(A) (*Severi* [5]) $V_{d,\,\delta}$ *è non-vuota ed ovunque regolare; in particolare,* $dim(V_{d,\,\delta}) = 3d + g - 1$.

(B) (*Harris* [3]).

$\overline{V}_{d,\,\delta}$ *è irriducibile.*

Il risultato di regolarità di Severi discende facilmente dal fatto che i nodi di una qualsiasi curva $[X] \in V_{d,\,\delta}$ impongono condizioni indipendenti al sistema lineare completo delle curve piane di grado d; ciò corrisponde al fatto che le *aggiunte* (1) di grado d determinano sulla normalizzazione C una sistema lineare completo e non-speciale (2).

Per quanto riguarda il numero di moduli di $V_{d,\,\delta}$, nel caso in cui il morfismo $\pi_{|D|,\,\delta}$ in § 1 sia dominante (i.e. $\nu_{d,\,\delta} = 3g - 3$) allora $V_{d,\,\delta}$ si dice parametrizzare una famiglia di curve piane *a moduli generali*. Negli altri casi le curve della famiglia si dicono *a moduli particolari*.

DEFINIZIONE 4. – *Il* numero di moduli atteso *per* $V_{d,\,\delta}$ *è*

$$\min\{3g - 3,\ \dim(V_{d,\,\delta}) - \dim(PGL(3,\, \mathbf{C}))\} = \min\{3g - 3,\ 3d + g - 9\}.$$

In altre parole, se una varietà di Severi parametrizza curve a moduli particolari, allora ci si aspetta che la fibra generica di $\pi_{|D|,\,\delta}$ contenga solo un numero finito di classi di equivalenza proiettiva di curve. In effetti, abbiamo il ben noto risultato:

(1) Le curve passanti per i nodi.

(2) Tale osservazione si estende a curve su altre classi di superfici quali razionali, rigate o $K3$; tuttavia, su tali superfici, questi risultati si riferiscono a varietà di Severi supposte non vuote e non danno alcuna informazione sulla loro esistenza.

(C) (*Sernesi* [4]) *Per ogni* $d \geqslant 5$ *e* $d - 2 \leqslant g \leqslant p_a(d)$, $V_{d,\,\delta}$ *ha il numero di moduli atteso.*

3 – Risultati su superfici di tipo generale.

D'ora in poi S denoterà una superficie di tipo generale. Considerando problemi di regolarità di varietà di Severi $V_{|D|,\,\delta} \neq \emptyset$ su S, si vorrebbero estendere i risultati precedenti ma per una tale superficie l' osservazione di Severi non è applicabile in quanto la condizione sulle aggiunte (ricordata in § 2) in generale non è soddisfatta. Un altro metodo per stabilire se lo schema N dei nodi di X imponga o meno condizioni indipendenti a $|D|$ è stato introdotto da Chiantini-Sernesi ([2]) e consiste nell'associare a N un opportuno fibrato vettoriale di rango due su S e nell'applicare il criterio di instabilità di Bogomolov a tale fibrato. Le condizioni numeriche che si ottengono permettono, in certi casi, di determinare risultati di regolarità. Tali condizioni risultano le migliori possibili, almeno per superfici quintiche generiche di $\mathbf{P}^3$.

Il primo risultato originale nella tesi di Dottorato è la seguente generalizzazione dei teoremi in [2].

TEOREMA 1. – *Sia* $D \subseteq S$ *una curva liscia ed irriducibile. Si supponga che:*

1. $(D - 2K_S)^2 > 0$, $D(D - 2K_S) > 0$;
2. *Sia* $K_S^2 > -4$, *se* $D(D - 2K_S) \geqslant 8$, *oppure* $K_S^2 \geqslant 0$, *se* $D(D - 2K_S) < 8$;
3. $DK_S \geqslant 0$;
4. $(DK_S)^2 - D^2 K_S^2 < 4(D(D - 2K_S) - 4)$
5. *Sia* $\delta \leqslant \dfrac{D(D - 2K_S)}{4} - 1$, *se* $D(D - 2K_S) \geqslant 8$, *oppure* $\delta < \dfrac{D(D - 2K_S) + \sqrt{D^2(D - 2K_S)^2}}{8}$, *se* $0 < D(D - 2K_S) < 8$.

Allora se $[X] \in V_{|D|,\,\delta}$, *i* δ *nodi di* X *impongono condizioni indipendenti a* $|D|$. *In particolare, (ogni componente di)* $V_{|D|,\,\delta}$ *è regolare.*

La dimostrazione di questo risultato è un raffinamento di quella data in [2]; si osserva che, avendo ipotesi puramente numeriche, tale teorema vale per una piú vasta classe di superfici di tipo generale, per alcune delle quali i risultati in [2] non si possono applicare. Si è dimostrato inoltre che le diseguaglianze in 5. sono ottimali, almeno per le superfici generiche intersezioni complete, non-degeneri in $\mathbf{P}^r$ e canoniche (i.e. $K_S \sim H$, H sezione iperpiana di S).

Il problema di calcolare il numero di moduli di varietà di Severi su S di tipo generale si presenta alquanto complesso a causa del differente comportamento che tali varietà hanno rispetto a quello su $\mathbf{P}^2$. Infatti, in generale, esse sono riducibili ed ammettono (almeno) una componente regolare ma anche diverse componenti con una dimensione superiore a quella attesa (vedasi [1]). Per considerare allora componenti (genericamente) regolari, dobbiamo introdurre la limitazione

$$\delta \leqslant dim(|D|), \tag{1}$$

dato che su una tale S si ha, in generale, $dim(|D|) < p_a(D)$.

Per quanto riguarda il *numero di moduli atteso*, dal risultato (C) in § 2, euristicamente si può dare la seguente:

DEFINIZIONE 5. – *Sia S di tipo generale e regolare e sia δ come in* (1). *Il* numero di moduli atteso *per $V_{|D|,\delta}$ è $expmod(V_{|D|,\delta}) := dim(V_{|D|,\delta})$.*

In altre parole, su una tale S ci si aspetta di avere famiglie a moduli particolari ed, inoltre, che la fibra generica del morfismo $\pi_{|D|,\delta}$ sia finita.

Esistono esempi di superfici lisce, di tipo generale, regolari dette *superfici di Beauville (o fake-quadrics)* per cui, per opportune varietà di Severi, il numero di moduli atteso è superiore a quello effettivo. Alla luce di ciò, si può formulare il seguente:

Problema dei moduli: *data S di tipo generale e regolare, per quali $D \in Div(S)$ si ha $\nu_{D,\delta} = expmod(V_{|D|,\delta})$?*

Il nostro risultato piú generale relativo a tale problematica è il seguente:

TEOREMA 2. – *Sia $S \subset \mathbf{P}^r$ liscia, regolare e di tipo generale e sia H la sua sezione iperpiana. Se:*

(*i*) *$\Omega^1_S(K_S)$ è globalmente generato su S,*

(*ii*) *$D \sim K_S + 6H + L$, dove L è un divisore ampio,*

(*iii*) *$[X] \in V_{|D|,\delta}$ è un punto regolare,*

allora il morfismo $\pi_{|D|,\delta}$ ha differenziale iniettivo in $[X]$. Stessa conclusione per $[X] \in V_{|D|,0}$ con la sola ipotesi (ii).

In particolare, le componenti (genericamente) regolari di $V_{|D|,\delta}$ hanno il numero di moduli atteso.

Come corollario del risultato precedente, si hanno risposte affermative al problema dei moduli nel caso di componenti (genericamente) regolari di $V_{|mH|,\delta}$ su una $S_d \subset \mathbf{P}^3$, per $d \geqslant 6$, $m \geqslant d+3$ e $\delta \geqslant 1$ oppure $d \geqslant 5$, $m \geqslant d+3$ e $\delta = 0$. Le tecniche dimostrative utilizzano la teoria delle deformazioni infinitesimali equisingolari ed alcuni teoremi di annullamento per fibrati di rango due su S.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHIANTINI L. e CILIBERTO C., *On the Severi varieties of surfaces in* $\mathbf{P}^3$, J. Alg. Geometry, 8 (1999), 67-83.
[2] CHIANTINI L. e SERNESI E., *Nodal curves on surfaces of general type,* Math. Ann., **307** (1997), 41-56.
[3] HARRIS J., *On the Severi problem,* Inventiones Math., 84 (1986), 445-461.
[4] SERNESI E., *On the existence of certain families of curves,* Inventiones Math., **75** (1984), 25-57.
[5] SEVERI F., *Vorlesungen über Algebraischer Geometrie*, Anhang F, Leipzig, Teubner (1921).

Dipartimento di Matematica, Università di «Roma Tre»
e-mail: flamini@matrm3.mat.uniroma3.it
Dottorato di Ricerca in Matematica
(sede amministrativa: Università di Roma «La Sapienza») - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Edoardo Sernesi, Università di «Roma Tre»