
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

LORELLA FATONE

Modelli omogenei ed eterogenei per fluidi incomprimibili

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.3, p. 339–342.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_339_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_339_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Modelli omogenei ed eterogenei per fluidi incompressibili.

LORELLA FATONE

I metodi di decomposizione dei domini rappresentano una tecnica ormai consolidata per la risoluzione numerica di equazioni differenziali alle derivate parziali.

Le motivazioni che sono alla base di questa scelta sono molteplici ed una loro analisi dettagliata ed esauriente può essere trovata in letteratura [7]. Ricordiamo, ad esempio, la possibilità di poter manipolare con maggior semplicità geometrie complicate (decomponendo il dominio complesso in sottoregioni di forma più semplice), di poter usare differenti schemi numerici in zone diverse del dominio computazionale (dove la soluzione fisica del problema esibisce comportamenti notevolmente diversi tra loro) e, non ultimo, il notevole vantaggio che il calcolo parallelo offre nel caso in cui un problema possa essere ridotto ad una successione di sottoproblemi più semplici, risolvibili indipendentemente l'uno dall'altro.

Un'area in cui le procedure di decomposizione dei domini trovano ampia applicazione è la cosiddetta *decomposizione dei domini eterogenea*. Essa è presente quando, nell'approssimazione di certi fenomeni fisici, due o più tipi differenti di problemi ai valori iniziali e/o al contorno possono essere utilizzati in due o più sottoregioni disgiunte del dominio computazionale originario. Questo approccio generalizza quella che usualmente viene chiamata *decomposizione dei domini omogenea*, in cui lo stesso tipo di problema interviene in ogni sottodominio della regione di partenza.

In ogni metodo di decomposizione dei domini, tuttavia, il dominio computazionale viene diviso in un certo numero di sottodomini che possono essere o meno sovrapposti. Il problema originario viene allora riformulato opportunamente in ogni sottoregione in modo da ottenere una famiglia di sottoproblemi di dimensioni ridotte, in cui ognuno è accoppiato all'altro attraverso i valori della soluzione da calcolare sulle interfacce dei sottodomini stessi. Una delle questioni più rilevanti dal punto di vista matematico è, in realtà, la determinazione delle *condizioni d'interfaccia* le quali, nella decomposizione dei domini omogenea, devono garantire l'equivalenza tra la soluzione del problema completo e quella del problema ridotto, mentre nella decomposizione dei domini eterogenea, oltre ad essere ragionevoli da un punto di vista fisico, esse devono assicurare la risolubilità del problema accoppiato (nel senso che deve essere possibile provare l'esistenza della soluzione del problema ridotto sotto condizioni del tutto simili a quelle che garantiscono l'esistenza della soluzione del problema originario).

Una volta determinate le condizioni di trasmissione, si prospettano diversi approcci computazionali.

Dopo la sua discretizzazione, il problema differenziale può essere suddiviso in sottoproblemi corrispondenti alle sottoregioni disgiunte del dominio fisico di partenza. A questo punto una procedura di eliminazione a blocchi individua dei sistemi indipendenti, uno per ogni sottodominio, e un sistema globale accoppiante solo le incognite rimanenti sulle interfacce. L'interazione fra i due sistemi di incognite può essere effettuata allora tramite un metodo iterativo, come ad esempio il metodo del gradiente coniugato o il metodo di Richardson (o loro opportune varianti). Si osservi che, in questo caso, l'uso di un appropriato preconditionatore può ridurre notevolmente il numero di iterazioni necessarie a risolvere il problema proposto.

Un altro approccio, che evita la risoluzione di un sistema globale e l'utilizzo di appositi preconditionatori, si basa su alcuni metodi iterativi fra sottodomini che conducono ad una successione di problemi indipendenti di minore complessità. L'idea è quella di iterare fra due sottodomini adiacenti, imponendo in ognuno di essi parziali condizioni d'interfaccia in modo che, al termine del procedimento iterativo, le condizioni di trasmissione di partenza vengano automaticamente verificate. In particolare, nel caso in cui si considerino solamente due sottodomini, una condizione d'interfaccia viene assegnata ad un sottodominio e l'altra al dominio complementare. A questo punto un procedimento iterativo risolve il problema nella prima sottoregione e modifica passo passo il valore del dato sull'interfaccia che è connesso con la soluzione nell'altro sottodominio (*iteration by subdomain procedure*). Tale procedura iterativa può divenire estremamente efficiente scegliendo opportunamente un parametro di rilassamento sulle interfacce dei sottodomini.

Nella tesi di dottorato qui illustrata vengono analizzati alcuni metodi di decomposizione dei domini, con particolare riferimento all'accoppiamento di equazioni differenziali della fluidodinamica, anche di diverso tipo.

Si osservi che in fluidodinamica una vasta gamma di problemi «omogenei» in natura può essere trattata efficientemente anche con un approccio eterogeneo, dopo aver semplificato il problema originario in una o più sottoregioni del dominio di partenza. Quando, infatti, ci si aspetta una soluzione regolare e con piccole variazioni, anche metodi numerici «a basso costo» possono produrre risultati accurati, per cui l'usare più problemi modello, piuttosto che uno, determina anche una maggiore flessibilità nello scegliere il metodo numerico che meglio si adatta alla natura della soluzione del problema fisico in ogni sottodominio della regione di partenza.

Entrando nei particolari, le equazioni della fluidodinamica incomprimibile che vengono prese in considerazione nel lavoro di tesi sono le seguenti: equazioni di Navier-Stokes, equazioni di Oseen ed equazioni di Stokes.

Le equazioni di Navier-Stokes descrivono il moto di fluidi viscosi incomprimibili. La loro approssimazione numerica è, in generale, piuttosto complicata a causa sia della particolare natura dell'accoppiamento tra i campi di velocità e di pressione, sia a causa della presenza del termine convettivo, che è un termine non li-

neare. Per ovviare a quest'ultima difficoltà, spesso in letteratura si introducono modelli semplificativi, quali le equazioni di Stokes (in cui il termine non lineare non è presente) e le equazioni di Oseen (in cui il termine convettivo viene opportunamente linearizzato). In alcune circostanze questi due modelli forniscono soluzioni ragionevolmente accurate anche se, naturalmente, non risultano adatte in quei casi in cui è determinante il contributo del termine convettivo.

Nella tesi vengono studiati alcuni nuovi metodi di decomposizione dei domini che accoppiano le equazioni differenziali sopra menzionate. L'obiettivo finale è quello di fornire efficienti metodi numerici di calcolo per la simulazione di fluidi incomprimibili. In particolare, vengono presentati i modelli matematici che conducono alle procedure di decomposizione dei domini, la loro analisi e la loro approssimazione numerica. I risultati teorici e numerici ottenuti (riassunti in [1], [2], [3] e [4]) possono essere utilizzati per risolvere in modo efficiente diversi problemi nell'ambito della fluidodinamica incomprimibile.

Più specificatamente, sono stati proposti alcuni modelli eterogenei che accoppiano le equazioni di Navier-Stokes di partenza con le equazioni di Stokes o di Oseen, poste in determinate sottoregioni del dominio computazionale. L'approccio eterogeneo è motivato innanzitutto dalla necessità di ridurre la complessità del metodo numerico e, naturalmente, dalla possibilità di utilizzare tecniche di decomposizione dei domini. Facciamo notare, tuttavia, che questa strategia può essere giustificata solo in quelle situazioni in cui la differenza tra la soluzione del problema eterogeneo accoppiato e quella del problema di Navier-Stokes completo è «sufficientemente piccola». Oltre a questi accoppiamenti eterogenei, abbiamo considerato l'accoppiamento omogeneo Oseen/Oseen e quindi, come caso particolare, l'accoppiamento Stokes/Stokes. Con tale approccio abbiamo studiato anche problemi di Oseen con campi vettoriali discontinui (nel termine convettivo) sull'interfaccia interna al dominio computazionale.

Dal punto di vista matematico, sia nell'approccio omogeneo che in quello eterogeneo, particolare attenzione viene dedicata alla scelta delle condizioni di trasmissione da porre sull'interfaccia che separa i due sottodomini. Nella tesi l'analisi di queste condizioni viene ampiamente sviluppata per ogni tipo di accoppiamento. Tali analisi generalizza lo studio iniziato da Feistauer e Schwab in [5], [6] per la soluzione di equazioni di flusso in domini esterni.

Altri tipi di accoppiamenti nell'ambito della fluidodinamica incomprimibile possono trovarsi in letteratura. Si veda, ad esempio, [7] e le referenze incluse.

Un altro aspetto ampiamente discusso nella tesi è dedicato allo sviluppo di algoritmi iterativi coinvolgenti la successiva risoluzione di sottoproblemi locali a livello di sottodomini e tali da consentire l'utilizzo di solutori indipendenti in ogni sottoregione. Tutto ciò è sviluppato dettagliatamente sia per l'accoppiamento omogeneo Oseen/Oseen (e quindi Stokes/Stokes come caso particolare) che per gli accoppiamenti eterogenei Navier-Stokes/Oseen e Navier-Stokes/Stokes. Grande attenzione è rivolta all'analisi di convergenza delle procedure iterative proposte. In particolare, per dimostrare la convergenza dell'algoritmo iterativo

relativo all'accoppiamento non lineare Navier-Stokes/Oseen (ed in particolare Navier-Stokes/Stokes) nuove idee e procedure sono state proposte. La complessità delle equazioni coinvolte, infatti, necessita una dettagliata analisi preliminare al fine di individuare quali ipotesi, semplificazioni e sottigliezze tecniche possono essere utilizzate per dimostrare la convergenza dell'algoritmo iterativo in questione.

Tutte le formulazioni in gioco sono proposte a livello continuo per poter consentire lo studio dei metodi di decomposizione dei domini senza far riferimento a particolari discretizzazioni.

Al fine di provare l'efficienza, l'accuratezza e la flessibilità delle condizioni di trasmissione proposte per i vari tipi di accoppiamento, abbiamo considerato alcune applicazioni a classici problemi di fluidodinamica e molteplici risultati numerici ottenuti su diversi casi test sono presentati nella tesi. Per l'approssimazione numerica abbiamo utilizzato il *metodo degli elementi finiti*.

I risultati ottenuti mostrano l'efficienza delle procedure studiate e sottolineano l'interesse in questo tipo di problematiche.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FATONE L., GERVASIO P. e QUARTERONI A., *Multimodels for incompressible flows*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 2 (2000), 126-150.
- [2] FATONE L., GERVASIO P. e QUARTERONI A., *Iterative methods of multimodels for incompressible flows*, *Enumath99 Proceedings*, Quaderno n. 17/2000 del Seminario Matematico di Brescia, Brescia (2000).
- [3] FATONE L., GERVASIO P. e QUARTERONI A., *Numerical solution of vascular flows by heterogeneous domain decomposition methods*, *Domain Decomposition Proceedings, 2000.*, Quaderno n. 18/2000 del Seminario Matematico di Brescia, Brescia (2000).
- [4] FATONE L., GERVASIO P. e QUARTERONI A., *Multimodels for incompressible flows: iterative solutions for the Navier-Stokes/Oseen coupling*, Quaderno n. 15/2000 del Seminario Matematico di Brescia, Brescia (2000).
- [5] FEISTAUER M. e SCHWAB C., *Coupling of an interior Navier-Stokes problem with an exterior Oseen problem*, Technical Report Research 98-01, ETH, Zurich (1998).
- [6] FEISTAUER M. e SCHWAB C., *Coupled problems for viscous incompressible flow in exterior domains*, Technical Report Research 99-07, ETH, Zurich (1999).
- [7] QUARTERONI A. e VALLI A., *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Oxford Science Publications (1999).

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Milano
e-mail: fatone@campus.unicam.it

Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
(sede amministrativa: Università degli Studi di Milano) - Ciclo XII

Direttore di ricerca: Prof. Alfio Quarteroni, Politecnico di Milano e EPFL Losanna