Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Pietro Donatini

Valutazioni delle pseudodistanze naturali di taglia con metodi geometrico-variazionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 331–334.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_331_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 331-334

Valutazioni delle pseudodistanze naturali di taglia con metodi geometrico-variazionali.

Pietro Donatini

Spesso i topologi amano definire se stessi come quelle persone che non sanno distinguere un krapfen da una tazza, con tutte le difficoltà che ne conseguono dal punto di vista pratico. Questa attitudine, per quanto utile in molti ambiti di ricerca, potrebbe costituire un handicap in varie applicazioni in cui modelli matematici siano chiamati a discriminare le forme di oggetti, come accade ad esempio in robotica ed in visione artificiale. In tal caso, infatti, il concetto di omeomorfismo dice ben poco sul tipo di confronto a cui si è solitamente interessati.

La geometria differenziale offre descrizioni molto più dettagliate, ma facendo ciò paga il prezzo di una eccessiva capacità discriminatoria. Chi vorrebbe considerare diverse fra loro le forme di due forchette solo perché non hanno ambedue punte acuminate?

È chiaro che il gioco della distinzione si svolge su di un altro piano, che non è né quello della topologia (così propensa alla equivalenza fra forme) né quello della geometria differenziale, troppo legato a particolari irrilevanti dal punto di vista percettivo. Al solito, la giusta posizione sta probabilmente in qualche punto intermedio, che l'odierna ricerca tenta di determinare, con alterni successi.

La tesi che qui presentiamo si inserisce in questo filone di studi, cercando di esaminare le proprietà di un nuovo approccio al problema, detto pseudodistanza naturale di taglia.

Il punto di partenza è l'idea che il confronto fra spazi topologici debba avvenire attraverso una metrica che quantifichi il «costo» della deformazione dell'uno nell'altro rispetto ad un funzionale predeterminato, dipendente non solo dagli spazi ma anche dall'ottica sotto la quale questi vengano studiati.

Il problema del confronto di forme, infatti, deve tener conto di una intrinseca soggettività di giudizio. La cosa è ulteriormente complicata dal fatto che l'insieme delle deformazioni permesse non ha, in generale, una struttura di gruppo, come è facile intuire esaminando il punto di vista percettivo.

Le pseudodistanze naturali di taglia rispondono alle richieste implicite nelle precedenti considerazioni rendendo disponibile una metrica basata sulla minimizzazione di un funzionale particolarmente semplice, nella cui definizione entrano in gioco delle funzioni (dette funzioni misuranti) che, cambiando di volta in volta, rendono la teoria adattabile all'approccio soggettivo scelto per la discriminazione fra le forme.

Passiamo ora a descrivere più in dettaglio il problema che abbiamo affrontato. Si consideri l'insieme *Size* delle coppie $(\mathcal{M}, \varphi)$ dove $\mathcal{M}$ sia una varietà C^1 chiusa (cioè compatta e senza bordo) e $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ sia una funzione C^1. Chiameremo la coppia $(\mathcal{M}, \varphi)$ *coppia di taglia* e la funzione φ *funzione misurante*.

Assegnate due coppie di taglia $(\mathcal{M}, \varphi)$ e $(\mathcal{N}, \psi)$, indicheremo con $H(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ l'insieme di tutti gli omeomorfismi da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$.

DEFINIZIONE 1. – *Se* $H(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \neq \emptyset$, *la funzione* $\Theta : H(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \to \mathbb{R}$

$$\Theta(f) = \max_{P \in \mathcal{M}} | \varphi(P) - \psi(f(P)) |$$

è detta misura naturale di taglia *rispetto* alle funzioni misuranti φ e ψ.

In pratica la funzione Θ misura quanto f cambia i valori assunti dalle funzioni misuranti in punti corrispondenti.

DEFINIZIONE 2. – *Diremo* pseudodistanza naturale di taglia *la pseudodistanza* $\delta : Size \times Size \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *così definita*:

$$\delta((\mathcal{M}, \varphi), (\mathcal{N}, \psi)) = \begin{cases} \inf\limits_{f \in H(\mathcal{M}, \mathcal{N})} \Theta(f) & \text{se } H(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \neq \emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

In tutto il seguito il simbolo d indicherà la pseudodistanza naturale di taglia tra le coppie $(\mathcal{M}, \varphi)$ e $(\mathcal{N}, \psi)$ considerate.

La pseudodistanza appena definita è dunque uno strumento per confrontare varietà dotate di una funzione misurante, in base alla proprietà di forma che più interessa prendere in esame. È chiaro quanto sia in generale difficile valutare la pseudodistanza fra due coppie di taglia, dato che questo implica lo studio dello spazio di tutti i possibili omeomorfismi fra due varietà. Lo scopo principale della nostra ricerca è stato dunque quello di ottenere risultati che fornissero informazioni sulla suddetta pseudodistanza senza ricorrere al calcolo diretto.

Il primo teorema da noi provato si applica a varietà di ogni dimensione.

TEOREMA 1. – *Detta d la pseudodistanza naturale di taglia tra le coppie di taglia $(\mathcal{M}, \varphi)$ e $(\mathcal{N}, \psi)$, esiste un numero naturale k per il quale una delle due condizioni seguenti sia soddisfatta:*

i) k è dispari e kd è uguale alla distanza tra un valore critico di φ e un valore critico di ψ;

ii) k è pari e kd è uguale alla distanza tra due valori critici di φ o tra due valori critici di ψ.

Tale risultato motiva la seguente

DEFIMIZIONE 3. – *Si dice* numero di ripiegamento analitico *il più piccolo numero naturale k per il quale sia soddisfatta la i) o la ii) del Teorema* 1.

Il seguito del nostro studio è stato rivolto alla ricerca di limiti superiori per il numero di ripiegamento analitico. Numerosi esempi suggeriscono infatti la possibilità di trovare tali limiti almeno nel caso di curve e superfici. In particolare abbiamo dimostrato i due teoremi seguenti:

TEOREMA 2. – *Siano* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$ *due curve chiuse di classe* C^1. *Allora la pseudodistanza naturale di taglia* d *tra le coppie di taglia* $(\mathcal{M}, \varphi)$ *e* $(\mathcal{N}, \psi)$ *può essere:*

a) la distanza tra un valore critico di φ *e un valore critico di* ψ;
b) un mezzo della distanza tra due valori critici di φ;
c) un mezzo della distanza tra due valori critici di ψ.

Facendo uso della teoria sulle mappe armoniche (e, in particolare di un teorema dovuto a Jost e Shoen) ci siamo quindi concentrati sullo studio delle distanze naturali di taglia tra superfici provando che per quest'ultime il numero di ripiegamento analitico non è mai maggiore di 3.

TEOREMA 3. – *Siano* $\mathcal{M}$ *e* $\mathcal{N}$ *due superfici compatte e senza bordo di classe* C^1. *La pseudodistanza naturale di taglia* d *tra le coppie di taglia* $(\mathcal{M}, \varphi)$ *e* $(\mathcal{N}, \psi)$ *verifica almeno una delle seguenti proprietà* (K_φ *e* K_ψ *rappresentano gli insiemi dei punti critici di* φ *e* ψ):

a) $d = |\varphi(P) - \psi(Q)|$ con $P \in K_\varphi$ e $Q \in K_\psi$
b) $d = 1/2\,|\varphi(P) - \varphi(\overline{P})|$ con $P, \overline{P} \in K_\varphi$
c) $d = 1/2\,|\psi(Q) - \psi(\overline{Q})|$ con $Q, \overline{Q} \in K_\psi$
d) $d = 1/3\,|\varphi(P) - \psi(Q)|$ con $P \in K_\varphi$ e $Q \in K_\psi$.

La situazione in cui ci lascia il Teorema 3 è un poco insoddisfacente. Non siamo infatti in grado di dimostrare vera la tesi del Teorema 2 anche per le superfici, né di provarla falsa nel caso bidimensionale esibendo un esempio di due coppie di taglia per le quali il numero di ripiegamento analitico sia strettamente maggiore di 2. Siamo così costretti ad accettare la possibilità di un quarto caso *d*) che non possa essere ricondotto ai precedenti tre *a*), *b*), *c*), diversamente da quanto accade per le curve.

Concludiamo osservando che, pur partendo da motivazioni originarie di carattere applicativo, la nostra ricerca vuole presentarsi come un metodo variazionale per confrontare spazi topologici dotati di funzioni misuranti. Ci sta particolarmente a cuore il fatto che, per opportune scelte di quest'ultime, il nostro approccio renda possibile il confronto quantitativo fra vari tipi di strutture su varietà, come, fra le altre, le strutture metriche e quelle conformi. Infatti, tanto per fare un esempio, possiamo comparare le metriche su due varietà riemanniane $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ considerando la pseudodistanza naturale di taglia per $\mathcal{M}^2$ e $\mathcal{N}^2$, quando le rispettive funzioni misuranti associno a ciascuna coppia di punti della varietà studiata la loro distanza nella metrica corrispondente.

BIBLIOGRAFIA

[1] JOST, J. e SCHOEN, R., *On the existence of harmonic diffeomorphisms between surfaces*, Invent. Math, **66** (1982), 353-359.
[2] FROSINI, P., *Connections between size functions and critical points*, Math. Meth. Appl. Sci., **19** (1996), 555-569.
[3] VERRI, A. e URAS, C., *Computing size functions from edge maps*, Internat. J. Comput. Vision, **23 (2)** (1997), 169-183.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: donatini@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Patrizio Frosini, Università di Bologna