Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Mariagrazia Di Flaviano

Teorema di Nash-Moser ed equazioni iperboliche non lineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 327–330.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_327_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 327-330

Teorema di Nash-Moser ed equazioni iperboliche non lineari.

MARIAGRAZIA DI FLAVIANO

In questa tesi di dottorato l'autore si propone l'intento di presentare dei risultati originali, frutto di una lunga collaborazione con il Prof. P. D'Ancona, riguardanti il problema di Cauchy e i problemi misti associati ad equazioni debolmente iperboliche non lineari.

Come è ben noto, il problema di Cauchy associato ad un sistema del primo ordine non lineare strettamente iperbolico,

$$U_t = f(t, x, U, \nabla_x U),$$

(e, più in generale, a sistemi pseuddodifferenziali non lineari simmetrizzabili del primo ordine) è localmente ben posto in C^∞: il corrispondente sistema linearizzato

$$U_t = g_1(t, x, V, \nabla_x V)\, U_x + g_2(t, x, V, \nabla_x V)\, U + h(t, x, V, \nabla_x V)$$

soddisfa stime dell'energia del tipo

$$\|U(t, \cdot)\|_{H^s} \leqslant C(\|V(t, \cdot)\|_{H^s})[\|U_0\|_{H^s} + 1], \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

grazie alle quali l'esistenza locale è essenzialmente una conseguenza di teoremi di punto fisso in spazi di Banach. Invece, il problema dell'esistenza locale per equazioni o sistemi debolmente iperbolici è molto più difficile e ancora largamente aperto ed anche per alcune semplici equazioni lineari la locale buona positura in C^∞ può venir meno. Limitando l'attenzione alle equazioni debolmente iperboliche del secondo ordine, si hanno due principali ostacoli che possono impedire la buona positura in C^∞: la presenza di oscillazioni nel tempo dei coefficienti della parte ellittica e la presenza di termini di ordine inferiore, questi ultimi possono distruggere la risolubilità se non sono opportunamente dominati dalla parte principale dell'operatore (cioè se le cosidette condizioni di Levi sono assenti). Pertanto, per ottenere la buona positura in C^∞ sono necessarie ulteriori ipotesi.

Tra i risultati più interessanti riguardanti il caso lineare si segnalano quelli dovuti a F. Colombini, P. D'Ancona, E. De Giorgi, K. Kayitani, T. Nishitani, A.O. Oleinik, N. Orrú, S. Spagnolo. Da tale letteratura emerge un fenomeno molto importante caratteristico della debole iperbolicità: la soluzione è meno regolare dei dati. Tale perdita di derivate impedisce di provare l'esistenza locale nel caso non lineare con le stesse tecniche usate nel caso strettamente iperbolico. Infatti, pur supponendo che l'equazione linearizzata possa essere risolta, la sua soluzione è, in generale, meno regolare dei dati e dunque non possono essere usati semplici teoremi di punto fisso, ma occorrono tecniche più raffinate. L'autore supera tale difficoltà ricorrendo al teorema di Nash-Moser.

TEOREMA 1. – *Siano F, G spazi di Fréchet tame e sia $P : F \to G$ un'applicazione smooth tame. Se l'equazione $DP(f)\, h = k$ (DP indica la derivata di Fréchet) ha un'unica soluzione per ogni $f \in F$ e ogni $k \in G$ e se la famiglia di inverse $VP : F \times G \to F$ è un'applicazione smooth tame, allora P è localmente invertibile e ogni inversa locale è smooth tame.*

Senza entrare troppo nello specifico, uno spazio di Fréchet tame è uno spazio di Fréchet dotato di una successione crescente di seminorme ($\{ |\cdot|_n \}$) che ammette dei «buoni» operatori regolarizzanti; mentre un'applicazione è smooth tame se è smooth e per la funzione e ogni sua derivata valgono localmente stime del tipo

$$|P(f)|_n \leq C(1 + |f|_{n+r}), \qquad \forall n \geq b.$$

Si può dimostrare che per ogni varietà compatta (con o senza bordo) X, lo spazio di Fréchet $C^\infty(X)$ è tame e che ogni operatore alle derivate parziali lineare e non lineare su di esse è smooth tame (per una completa trattazione del teorema di Nash-Moser si veda [4]).

Tra i primi ad usare il teorema di Nash-Moser nello studio di equazioni debolmente iperboliche non lineari si segnalano N. Iwasaky e D. Gourdin, che hanno ottenuto risultati per equazioni con molteplicità costante. Più recentemente P. D'Ancona e R. Manfrin hanno usato il teorema di Nash-Moser nel caso di molteplicità variabile. Il risultato presentato dall'autore [1] estende i precedenti risultati in quanto, oltre a considerare coefficienti dipendenti sia dalla variabile temporale che da quelle spaziali, permette che il termine non lineare dipenda anche dalla derivata temporale della soluzione.

TEOREMA 2. – *Si consideri il problema di Cauchy*

$$(1) \qquad \begin{cases} u_{tt} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t,x)\, u_{x_i})_{x_j} + f(t, x, u, \nabla_x u, u_t) \\ u(0,x) = u_0(x) \qquad u_t(0,x) = u_1(x). \end{cases}$$

Si supponga che sia debolmente iperbolico, ossia

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i \xi_j \leq \Lambda\,,$$

per una costante $\Lambda > 0$ e per ogni t e per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$, che i coefficienti siano funzioni regolari e che esistano delle costanti $A, \alpha > 0$ tali che per ogni t, x, y, p, q

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(t, x, y, p, q)\, \xi_i \right)^2 \cdot t \leq A \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\, \xi_i \xi_j + \partial_t \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\, \xi_i \xi_j .$$

Allora, il problema di Cauchy (1) *ha un'unica soluzione locale in $C^\infty([0, T_0], \mathbf{R}^n)$ per ogni coppia di dati iniziali in $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.*

Passo chiave della dimostrazione di tale risultato è l'osservare che provare l'esistenza locale per il problema (1) equivale a mostrare che il seguente operatore

$$(Pu)(t,x) = u(t,x) - u_0(x) - tu_1(x) - \int_0^t (t-s) \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(s)\, u_{x_i}(s,x))_{x_j} ds + - \int_0^t (t-s)\, f(s,x,u(s,x),u_x(s,x))\, ds\,,$$

definito in un opportuno spazio di Fréchet, ha nella sua immagine una funzione che si annulla in un intervallo di tempo non nullo (e ciò è possibile con tecniche standard) e che è localmente invertibile (e ciò si ottiene usando il teorema di Nash-Moser e risultati del caso lineare).

Il teorema di Nash-Moser permette all'autore di ottenere anche un risultato riguardante i problemi misti associati ad equazioni iperboliche degeneri non lineari. Lo studio di problemi misti per equazioni debolmente iperboliche non lineari è solo al suo inizio ed i pochi risultati presenti in letteratura trattano speciali degenerazioni (anche nel caso lineare). Alle difficoltà incontrate nei problemi di Cauchy si aggiunge la possibilità che le condizioni al bordo interagiscano in modo complesso sia con la parte principale dell'operatore che con i termini di ordine inferiore.

Nel risultato presentato dall'autore [3] si considera un operatore iperbolico che degenera di ordine polinomiale sulla superficie iniziale.

TEOREMA 3. – *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un aperto limitato con frontiera regolare. Si consideri il problema misto*

$$Lu = f(t,x,u,u_t,\nabla_x u)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x)$$

$$D_x^\alpha u_0(x) = D^\alpha u_1(x) = D_x^\alpha \partial_t^j f = 0 \quad \textit{for} \quad x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \quad \forall \alpha \in N^n,\ j \geq 0,$$

con $f(t,x,u,v,p) = h(t,x,u,v) + t^{k-1} g(t,x,u,v,p)$, *dove* $h \in C^\infty([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^2)$, $g \in C^\infty([0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbf{R}^{n+2})$ *e* $L(t,x,D)$ *è definito come segue*

$$L(t,x,D)\,u := u_{tt} - t^{2k} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(t,x)\, u_{x_i})_{x_j} + t^k \sum_{j=1}^{n} h_j(t,x)\, u_{tx_j} +$$

$$+ t^{k-1} \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\, u_{x_j} + b_0(t,x)\, u_t + c(t,x)\, u\,,$$

con $k \geq 1$ *intero e la forma*

$$a_{ij}(t,x) = \overline{a_{ji}(t,x)}, \qquad \sum_{ij} a_{ij}(t,x)\, \xi_i \xi_j \geq \nu_0 |\xi|^2, \qquad \nu_0 > 0$$

simmetrica e definita strettamente positiva. Allora esiste un'unica soluzione locale $u \in C^\infty([0,T_0] \times \overline{\Omega})$ *al problema tale che* $D_x^\alpha \partial_t^j u = 0$ *per* $x \in \partial\Omega$ *e ogni* t, α, j.

In questo caso per poter utilizzare il teorema di Nash-Moser occorre provare particolari stime a priori per la corrispondente equazione linearizzata (lo si fa servendosi di funzioni energia opportunamente scelte).

In questa tesi viene presentato anche il seguente risultato astratto [2] ottenuto senza l'utilizzo del teorema di Nash-Moser.

TEOREMA 4. – *Dato uno spazio di Hilbert H con norma $|\cdot|$, si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'' + \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(t) \cdot B^\alpha u = f(t) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{2}$$

dove $B = (B_1, \ldots, B_n)$ è un'ennupla di operatori autoaggiunti su H, con domini $D(B_j)$. Si assuma che le funzioni $a_\alpha(t)$ siano analitiche reali su $[0, T]$, che la forma $\sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(t) \cdot \xi^\alpha$ sia non negativa per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$ e che i risolventi $R(i, B_j)$ commutino a due a due, i.e.

$$R(i, B_j)\, R(i, B_k)\, u = R(i, B_k)\, R(i, B_j)\, u \qquad \forall j, k = 1 \ldots, n, \quad \forall u \in H.$$

Allora, fissato $T > 0$ esiste un intero s_0 tale che, per ogni $s \geq 2m$ e per ogni $u_0, u_1 \in H^{s+s_0}$, $f(t) \in C([0, T]; H^{s+s_0})$ il problema (2) *ha un'unica soluzione $u(t) \in C^2([0, T]; H^s)$, dove*

$$H^s = \bigcap_{1 \leq j_i \leq n} D(B_{j_1} \circ \cdots \circ B_{j_s})$$

sono spazi di Hilbert con la norma $|u|_s^2 = \sum |B_{j_1} \circ \cdots \circ B_{j_k} u|^2$, con la sommatoria calcolata su $0 \leq k \leq s$ and $1 \leq j_i \leq n$.

Idea centrale della dimostrazione di questo teorema è l'utilizzo di una generalizzazione del teorema spettrale che sposta il problema su un opportuno spazio di misura $L^2(X, d\mu)$ su cui, successivamente, si possono utilizzare opportune energie pesate. Notiamo che tale risultato trova applicazioni su vari problemi misti.

BIBLIOGRAFIA

[1] D'ANCONA P. e DI FLAVIANO M., *On quasilinear hyperbolic equations with degenerate principal part*, Tsukuba J. Math., **22** (1998), 559-574.

[2] D'ANCONA P. e DI FLAVIANO M., *An abstract degenerate hyperbolic equation with application to mixed problems*, Hokkaido Math. J., to appear.

[3] D'ANCONA P. e DI FLAVIANO M., *On a weakly hyperbolic quasilinear mixed problem of second order*, preprint.

[4] HAMILTON R.S., *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **7** (1982), 65-222.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di L'Aquila
e-mail: diflavia@univaq.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma 2) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. P. D'Ancona, Università di Roma 1