

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

PAOLO DETTI

## Il rilassamento Lagrangiano in problemi di sequenziamento

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.3, p. 323–325.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_2000\\_8\\_3A\\_3\\_323\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_323_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Il rilassamento Lagrangiano in problemi di sequenziamento.

PAOLO DETTI

### 1 – Premessa.

Nella tesi sono stati affrontati due particolari problemi di ottimizzazione combinatoria, e sono stati proposti alcuni algoritmi risolutivi basati sulla tecnica di Rilassamento Lagrangiano. Tali problemi sono problemi di sequenziamento, ossia consistono nel determinare un ordinamento degli elementi di un dato insieme, in modo da ottimizzare una prefissata funzione di costo. I problemi di sequenziamento trovano molteplici applicazioni pratiche: dalla pianificazione della produzione nei sistemi manifatturieri, al progetto di layout di impianti, dall'instradamento di veicoli, al progetto di circuiti di integrati.

I due problemi considerati nella tesi sono conosciuti in letteratura con il nome di *Minimum Storage-Time Sequencing* e di *Sequential Ordering* rispettivamente, ed hanno essenzialmente due caratteristiche comuni:

– possono essere formulati come problemi di sequenziamento di un insieme di attività che devono essere eseguite, una alla volta, su una singola macchina.

– Generalizzano alcuni classici problemi di scheduling e di ottimizzazione combinatoria.

### 2 – Minimum Storage-Time Sequencing.

Il problema del *Minimum Storage-Time Sequencing* (MSTS) generalizza alcuni classici problemi di ottimizzazione combinatoria e di scheduling, quali, ad esempio, il problema del *Directed Linear Arrangement* e il problema di sequenziare su di una macchina un insieme di lavori, vincolati tra loro da relazioni di precedenza, con l'obiettivo di minimizzare la somma pesata dei tempi di completamento dei lavori.

Data una relazione di precedenza descritta da un grafo orientato aciclico  $D = (N, A)$ , dove  $N$  è l'insieme dei nodi ed  $A$  l'insieme degli archi, sia  $p_i$  il peso associato al nodo  $i$  e  $c_{ij}$  il peso associato all'arco  $(i, j)$ . Il problema MSTS consiste nel trovare un sequenziamento dei nodi  $\sigma$ , ammissibile rispetto alle precedenze, in modo tale che sia minimizzata la seguente funzione obiettivo:

$$(1) \quad \sum_{(i, j) \in A} c_{ij} \left( \left( \sum_{\sigma(k) < \sigma(j)} p_k \right) \sigma(j) - \left( \sum_{\sigma(k) < \sigma(i)} p_k \right) \sigma(i) \right)$$

dove con  $\sigma(j)$  e  $\sigma(i)$  si sono indicate, rispettivamente, le posizioni del nodo  $j$  e del nodo  $i$  nella sequenza, e con  $\sigma(k) < \sigma(j)$  [ $\sigma(k) < \sigma(i)$ ] i nodi  $k$  che nella sequenza precedono il nodo  $j$  [ $i$ ]. In pratica, se si associano ai nodi del grafo operazioni che

devono essere eseguite, una alla volta, su un singolo processore, il peso  $p_i$  di ogni nodo può rappresentare il tempo necessario per eseguire l' $i$ -esima operazione, ed il peso  $c_{ij}$  associato ad ogni arco può rappresentare il costo di immagazzinamento, per unità di tempo, del risultato generato dall'operazione  $i$  prima che venga utilizzato dall'operazione  $j$ .

Un'altra applicazione del *Minimum Storage-Time Sequencing* è il problema del *Single-Row Machine Layout*, in cui un insieme di macchine devono essere disposte lungo una linea di produzione. In tale problema, per usufruire a pieno dei vantaggi derivanti da una produzione in linea, l'assegnamento delle macchine a posizioni deve essere effettuato in modo che operazioni successive di ogni parte che deve essere prodotta (si suppone che ogni parte da produrre richieda un insieme di operazioni vincolate da relazioni di precedenza) siano effettuate da macchine il più possibile vicine tra loro. L'obiettivo è quello di trovare una disposizione delle macchine che minimizzi il tempo totale di trasferimento delle parti.

MSTS è risolubile in tempo polinomiale se il grafo orientato  $D = (N, A)$  è un *rooted tree*, ossia un albero avente come radice un nodo pozzo. Per questo caso, nel 1973 Adolphson e Hu [1] propongono un algoritmo polinomiale di complessità  $O(n \log n)$ .

Per il problema del *Minimum Storage-Time Sequencing*, sono presentati uno studio di diverse formulazioni di Programmazione Lineare Intera e una comparazione di diversi lower bound ottenuti da rilassamenti lineari e Lagrangiani delle varie formulazioni.

Viene proposto, inoltre, un nuovo lower bound calcolabile in modo combinatorio [4], ottenuto attraverso il Rilassamento Lagrangiano di un sotto insieme di vincoli di precedenza (tali da trasformare il grafo delle precedenze in un albero). Per l'ottimizzazione del problema Lagrangiano così ottenuto, è stato impiegato un metodo *bundle*. Il bound Lagrangiano è stato inserito in uno schema di *branch and bound* le cui performance sono state testate su vari insiemi di istanze generate in modo casuale. I risultati computazionali mostrano che il bound proposto, che richiede, in generale, ridotti tempi di calcolo, risulta essere qualitativamente buono quando la struttura del grafo delle precedenze è sparsa. In questi casi, quindi, l'algoritmo di branch and bound risulta essere particolarmente efficiente.

### 3 – Sequential Ordering.

Il secondo problema affrontato è il problema del *Sequential Ordering* (SOP) con precedenze e vincoli di *due date*. Il *Sequential Ordering* è stato introdotto per la prima volta da Escudero nel 1988 [5], e, dato un grafo orientato con pesi sugli archi e sui nodi, consiste nel trovare un cammino Hamiltoniano di peso minimo che soddisfi le relazioni di precedenza tra i nodi, e che rispetti la *due date* di ogni nodo (ossia, sia tale che il peso del cammino dal nodo di origine ad ogni altro nodo  $i$  sia inferiore al valore della *due date* di  $i$ ).

A partire da una formulazione di Programmazione Lineare Intera, per tale problema è stato proposto uno schema di *Relaxation and Cut* Lagrangiano per il calcolo di un lower bound. Tale schema prevede un primo rilassamento Lagrangiano ottenuto eliminando i vincoli sulle due date e sulle precedenze, e rilassando

in modo Lagrangiano i vincoli che forzano ogni nodo, in ogni soluzione ammissibile, ad avere al più un solo successore. La soluzione del problema Lagrangiano costituisce un lower bound al problema originario, e corrisponde ad un problema di arborecenza a somma minima (*Min-Sum Arborescence*) risolubile in tempo polinomiale. Il bound è rafforzato attraverso l'individuazione ed il rilassamento Lagrangiano di tagli validi dei vincoli di precedenza e di *due date* (Ascheuer et al. [2], Balas et al. [3] e Ortuño [6]). Tali tagli sono generati "on the fly", cioè durante il calcolo del lower bound Lagrangiano, ed inseriti di volta in volta nella funzione obiettivo. In particolare, mentre i tagli validi sui vincoli di precedenza erano già stati utilizzati in letteratura per la messa a punto di algoritmi di *branch and bound* e di *branch and cut*, i tagli sulle due date non erano mai stati applicati in precedenza. Essi sono generati in due fasi. Nella prima fase sono individuati i vincoli di *due date* violati dall'arborecenza, soluzione del problema rilassato corrente. Nella seconda fase, tali vincoli sono rafforzati ed inseriti nella funzione obiettivo in modo Lagrangiano. L'algoritmo di *Relaxation and Cut* è stato testato su istanze generate da istanze di SOP con precedenze note in letteratura. I risultati computazionali presentati mostrano l'efficacia del metodo proposto.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] ADOLPHSON A. e HU T.C., *Optimal Linear Ordering*, SIAM Journal of Applied Mathematics, **25** (1973), 403-423.
- [2] ASCHEUER N., ESCUDERO L.F., GRÖTSCHEL M., e STOER M., *A cutting Plane Approach to the Sequential Ordering Problem (With Applications to Job Scheduling in Manufacturing)*, SIAM Journal on Optimization, **3** (1993), 25-42.
- [3] BALAS E., FISCHETTI M. e PULLEYBLANK W.R., *The Precedence-Constrained Asymmetric Traveling Salesman Polytope*, Mathematical Programming, **68** (1995), 241-265.
- [4] DETTI P. e PACCIARELLI D., *A branch and bound algorithm for the Minimum Storage-Time Sequencing problem*, Naval Research Logistics, **48** (2001), 313-333.
- [5] ESCUDERO L.F., *An Inexact Algorithm for the Sequential Ordering Problem*, European Journal of Operational Research, **37** (1988), 236-249
- [6] ORTUÑO M.T., *Sobre cortes Lagrangianos Fuertes en la resolución del Problema del Ordenamiento Secuencial*, PhD Thesis, Universidad Complutense de Madrid (1995).

Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione, Università degli Studi Siena  
e-mail: detti@dii.unisi.it

Dottorato in Ricerca Operativa

(sede amministrativa: Università «La Sapienza» di Roma) – Ciclo XII

Direttore di ricerca: Prof. Fernando Nicolò, Università di Roma III