Alberto Calabri

Sulla razionalità dei piani doppi e tripli ciclici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 287–290.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_287_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 287-290

Sulla razionalità dei piani doppi e tripli ciclici.

ALBERTO CALABRI

Un *piano multiplo* è un rivestimento multiplo del piano proiettivo, cioè è dato da un morfismo finito di varietà algebriche $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ di grado n, per un certo n. Consideriamo il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ definito su un campo k algebricamente chiuso e di caratteristica zero. Inoltre supponiamo che X sia irriducibile, ma non necessariamente liscia, normale, o altro.

Per esempio, una superficie X di grado d in $\mathbb{P}^3$ si può vedere come piano d-uplo, semplicemente proiettando X da un punto $p \notin X$ su un piano non passante per p.

Diciamo che due piani multipli $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ e $\varrho : Y \to \mathbb{P}^2$ sono *birazionalmente equivalenti se esistono due applicazioni birazionali* $\phi : Y \dashrightarrow X$ *e* $\gamma : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ *tali che* $\gamma \circ \varrho = \pi \circ \phi$, *ovvero tali che il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[d, "\varrho"] & X \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{P}^2 \arrow[r, dashed, "\gamma"] & \mathbb{P}^2 \end{tikzcd}$$

Algebricamente una classe di equivalenza birazionale di piani n-upli corrisponde ad una estensione algebrica di grado n del campo di funzioni razionali $K \cong k(x, y)$ su $\mathbb{P}^2$, a meno di isomorfismi di campi che fissano K (e ogni elemento di k).

In questo lavoro abbiamo affrontato il seguente:

PROBLEMA 1. – *Classificare, a meno di equivalenza birazionale, i piani n-upli che sono superficie razionali.*

Ricordiamo che una superficie algebrica X si dice *razionale se esiste una applicazione birazionale* $\psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, *ovvero, dal punto di vista analitico, se esiste una funzione bimeromorfa da* X *a* $\mathbb{P}^2$.
Naturalmente si può porre il problema analogo all'1 per qualsiasi altro tipo di superficie algebriche, come le rigate, K3, di Enriques, iperellittiche e così via.

Per i piani doppi (cioè per $n = 2$), la soluzione al problema 1 è contenuta nel seguente:

TEOREMA 1. – *Un piano doppio razionale è birazionalmente equivalente ad un piano doppio la cui curva diramazione è una e una sola delle seguenti:*

1. *una conica liscia;*
2. *una quartica liscia;*

3. *una sestica irriducibile con due punti tripli infinitamente vicini e nessun'altra singolarità;*

4. *una curva irriducibile di grado* $2d > 2$ *con una singolarità ordinaria di molteplicità* $2d-2$ *e:*

   (*a*) *nessun'altra singolarità;*

   (*b*) *un nodo e nessun'altra singolarità.*

Inoltre un piano doppio rigato di genere $q > 0$ *è birazionalmente equivalente ad un piano doppio diramato su* $2q+2$ *rette distinte passanti per uno stesso punto.*

Ricordiamo che un piano doppio è univocamente determinato dalla sua *curva di diramazione*, che in parole povere è il luogo dei punti del piano la cui controimmagine mediante π è un'unico punto.

Siccome un piano doppio razionale determina una trasformazione birazionale $\iota : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ che è una *involuzione*, cioè tale che $\iota \circ \iota = 1_{\mathbb{P}^2}$, la classificazione birazionale dei piani doppi razionali equivale alla classificazione, a meno di coniugio, degli elementi di ordine 2 del gruppo delle trasformazioni birazionali $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ di $\mathbb{P}^2$ in sé, che è chiamato usualmente gruppo di Cremona.

Sostanzialmente l'enunciato del teorema 1 era già noto classicamente (l'unico fatto che non era noto era l'individuazione dei sottocasi (*a*) e (*b*) del tipo 4), ma prima di questa tesi non se ne conosceva una dimostrazione rigorosa.

Infatti la dimostrazione classica comunemente accettata, quella di Castelnuovo ed Enriques, esposta in [3] e migliorata in [5], ad un'attenta analisi si è rivelata imprecisa e soprattutto incompleta. Ciò nonostante è stato possibile dimostrare il teorema 1 perfezionando le idee di Castelnuovo ed Enriques, usando la caratterizzazione dei piani doppi rigati dovuta a De Franchis (cfr. [4]) e la classificazione birazionale dei fasci di curve razionali piane.

Molto recentemente, dopo che questa tesi era stata discussa, anche Bayle e Beauville [1] hanno dimostrato la classificazione birazionale delle involuzioni di $\mathbb{P}^2$ usando tecniche completamente diverse, in particolare applicando la teoria di Mori.

Per $n > 2$, il problema 1 è ancora insoluto e sembra tuttora intrattabile, a meno di aggiungere qualche ipotesi restrittiva, come per esempio limitandosi a considerare i piani multipli ciclici.

Diciamo che un piano n-uplo $\pi : X \to \mathbb{P}^2$ è *ciclico* se esiste un'azione del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_n$ su X tale che π sia la proiezione $X \to X\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{P}^2$. Inoltre diciamo che π è *semplice* se:

$$\pi_* \mathcal{O}_X \cong \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(id)$$

per qualche $d \geqslant 0$. Per esempio, sia X la superficie di $\mathbb{P}^3$ definita da:

$$z^n = f(x, y, w),$$

dove x, y, w, z sono le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^3$ e f è un polinomio omogeneo di grado multiplo di n. Proiettando X sul piano $z = 0$ dal punto all'infinito dell'asse z, cioè da $(0, 0, 0, 1)$, si ottiene un piano n-uplo ciclico semplice, la cui curva di diramazione è $\{f = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ (volendo essere precisi, occorrerebbe considerare $\mathbb{P}^3$ pesato con pesi rispettivamente 1, 1, 1, $\deg(f)/n$).

È immediato verificare che un piano multiplo ciclico semplice è univocamente determinato dalla propria curva di diramazione.

Inoltre si dimostra che un piano n-uplo ciclico è birazionalmente equivalente ad un piano n-uplo ciclico semplice e si può supporre che la curva di diramazione non abbia nessuna componente contata con molteplicità n o maggiore.

Ovviamente ogni piano doppio è ciclico semplice. Perciò è naturale ipotizzare che le tecniche usate per classificare i piani doppi possano essere applicate con successo anche per studiare i piani multipli ciclici semplici. Al crescere di n, però, aumentano notevolmente anche le difficoltà tecniche che si incontrano (per esempio le singolarità diventano molto più complicate).

In questa tesi abbiamo risolto il problema 1 anche per i piani *tripli* ciclici, dimostrando il seguente:

TEOREMA 2. – *Un piano triplo ciclico razionale è birazionalmente equivalente ad un piano triplo ciclico semplice la cui curva diramazione è una e una sola delle seguenti:*

1. *una cubica spezzata in una retta doppia e una semplice;*
2. *una cubica liscia;*
3. *una sestica irriducibile con un punto quadruplo a cui sono infinitamente vicini (in direzioni distinte) due punti doppi.*

Inoltre un piano triplo ciclico rigato irrazionale è birazionalmente equivalente ad un piano triplo ciclico semplice diramato su (almeno tre) rette, semplici o doppie, passanti per uno stesso punto.

Chiaramente il tipo 1 è birazionalmente equivalente alla superficie cubica (singolare) di $\mathbb{P}^3$ di equazione $z^3 = xy^2$ (o meglio alla sua proiezione dal punto $(0, 0, 0, 1)$ sul piano $z = 0$).

Dopo la discussione della tesi, ci è stato segnalato da I. Dolgachev che Bottari in [2] aveva già proposto una classificazione delle classi di equivalenza birazionale dei piani n-upli ciclici semplici razionali, per ogni n, basandosi essenzialmente sulla classificazione dei sottogruppi di ordine finito di $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ dovuta a Kantor e Wiman, la cui dimostrazione è però alquanto oscura e laboriosa.

In verità, gli enunciati di Bottari risultano essere imprecisi già per $n = 3$, infatti Bottari aveva individuato correttamente i tipi 1, 2 e 3 del teorema 2, ma aveva aggiunto un ulteriore tipo, costituito da una famiglia infinita di curve di diramazione, che in realtà si dimostra essere birazionalmente equivalente al tipo 1.

Molto recentemente, De-Qi Zhang [6] ha annunciato di aver completato la classificazione birazionale degli elementi di ordine primo di $Bir(\mathbb{P}^2)$, applicando la teoria di Mori sul solco di [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] BAYLE L. e BEAUVILLE A., *Birational involutions of* $\mathbb{P}^2$, preprint, disponibile nel sito Web http://arXiv.org/, n. 9907028.
[2] BOTTARI A., *Sulla razionalità dei piani multipli* $\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\}$, Ann. Mat. Pura Appl., Serie III, **2** (1899), 277-296, e Giorn. Mat., **41** (1903), 285-321.
[3] CASTELNUOVO G. e ENRIQUES F., *Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **14** (1900), 290-302.
[4] CATANESE F. e CILIBERTO C., *On the irregularity of cyclic coverings of algebraic surfaces*, in Geometry of Complex Projective Varieties, Seminars and Conferences 9, Mediterranean Press, 1993, 89-155.
[5] CONFORTO F., *Le superficie razionali*, Zanichelli, Bologna, 1939.
[6] ZHANG DE-QI, *Automorphisms of Finite Order on Rational Surfaces*, with an Appendix by I. Dolgachev, preprint.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «Tor Vergata»
E-mail: calabri@mat.uniroma2.it
Dottorato di Ricerca in Matematica
(sede amministrativa: Università di Roma «La Sapienza») - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Ciro Ciliberto, Università di Roma «Tor Vergata»