Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Renato Bettin

Nuovi metodi per il Pallet Loading Problem

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 279–282.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_279_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 279-282

Nuovi metodi per il Pallet Loading Problem.

RENATO BETTIN

Il problema del Pallet Loading appartiene alla vasta famiglia dei problemi di *cutting & packing (C & P)*. Questo settore della ricerca operativa ha ampie applicazioni nell'industria manifatturiera e nei trasporti, ed è oggetto di studio approfondito a partire dagli anni '50. All'interno del C & P rientrano problemi molto diversi tra loro, ma che condividono una comune struttura: lo studio della disposizione geometrica di oggetti all'interno di domini più grandi, in assenza di sovrapposizioni, che garantisca un utilizzo ottimale delle risorse disponibili. Queste risorse possono essere il numero di contenitori usati, come nel bin packing, oppure lo spazio occupato all'interno di un contenitore, come nel container loading, o altro ancora; problemi ben noti come il knapsack, il multiprocessor scheduling, il memory allocation problem rientrano a pieno titolo nel C & P. Gli oggetti da inserire sono visti in «positivo», nel packing, o in «negativo», nel cutting. Nel C & P una posizione particolare è occupata dai problemi che riguardano l'impaccamento di oggetti identici; infatti le proprietà combinatoriche di questi problemi possono risultare molto interessanti ma nel contempo difficili da studiare; come si vedrà il Pallet Loading Problem (PLP) fornisce un esempio di queste difficoltà.

Nella formulazione originale del Pallet Loading Problem (noto anche come Manufacturer's Pallet Loading) consideriamo una collezione illimitata di scatole identiche, e un pallet, di forma rettangolare. Si richiede di trovare una disposizione delle scatole all'interno del pallet che massimizzi il numero delle scatole inserite. Senza perdita di generalità si assume che le dimensioni degli oggetti siano date da interi positivi. L'impaccamento deve essere *ortogonale*: ogni scatola deve avere le facce parallele a quelle del pallet. Inoltre l'impaccamento deve avvenire per strati orizzontali; si hanno tre spessori possibili per ogni strato, corrispondenti alle tre dimensioni della scatola. Questi vincoli corrispondono a esigenze di praticità nel caricamento del pallet.

Il problema si scompone così in due sottoproblemi: a) trovare, per ogni spessore possibile, una disposizione all'interno dello strato che renda massimo il numero di scatole usate: si tratta in effetti di un problema bidimensionale, il *rectangle packing problem* con rettangoli identici; b) trovare la sovrapposizione di strati ottimale: questo problema si esprime con un *integer knapsack problem*, con tre variabili corrispondenti ai tre possibili strati.

Il sottoproblema b) è di gran lunga il più semplice dei due, sia dal punto di vista pratico, sia dal punto di vista teorico.

In letteratura quindi con PLP ci si riferisce comunemente al sottoproblema a), in altre parole l'impaccamento ottimale di rettangoli identici (che chiameremo *box*) in un rettangolo più grande.

Un'istanza del PLP viene rappresentata con quattro interi (L, W, l, w), dove L e W sono le dimensioni del rettangolo contenitore $(L \geqslant W)$, mentre l e w sono le dimensioni dei box $(l \geqslant w)$.

1. – Complessità e proprietà fondamentali note.

Attualmente il PLP non è stato ancora classificato per quanto riguarda la sua complessità computazionale. In alcuni lavori degli anni '80 si supponeva dimostrata l'NP-completezza, ma in lavori successivi è stato notato come perfino l'appartenenza alla classe NP fosse dubbia. Una delle difficoltà principali è data dal fatto che ancora non sono note riduzioni polinomiali tra il PLP ed altri problemi conosciuti. L'unico risultato dimostrato finora riguarda un caso particolare, il *Guillotine Pallet Loading*, che risulta appartenere alla classe P. Nel Guillotine Pallet Loading vengono presi in considerazione solo pattern a ghigliottina, ovvero impaccamenti in cui è possibile separare i singoli box attraverso una successione di tagli che vanno da lato a lato dell'impaccamento residuo.

Uno dei più importanti risultati sul PLP è il Teorema di Barnes [1], che riguarda una proprietà »asintotica» degli impaccamenti ottimali. Partendo da un risultato di Brualdi e Foregger sugli impaccamenti ottimali di box $l \times 1$, Barnes individua un upper bound per il numero di box impaccabili in un'istanza generica (L, W, l, w); dimostra quindi che se si fissano le dimensioni del box, per L e W sufficientemente grandi l'upper bound coincide con il valore ottimo.

In letteratura sono presenti diversi altri upper bound, in alcuni casi ricavati da formulazioni di programmazione lineare intera o reale. È possibile migliorare complessivamente questi bound applicando un teorema fondamentale dovuto a Dowsland [2]. Il teorema dimostra che l'insieme delle istanze del PLP è partizionabile in classi di equivalenza; due istanze della stessa classe di equivalenza possiedono lo stesso ottimo, ed esiste una corrispondenza tra i pattern ammissibili delle due istanze. Usando questo risultato, ogni upper bound calcolato su una qualsiasi istanza di una classe di equivalenza risulta valido anche per tutte le altre istanze della classe; diventa utile allora cercare il minimo dell'upper bound sulla classe di equivalenza.

Attualmente sulle istanze test generalmente usate la differenza tra i migliori upper bound e l'ottimo non è mai superiore all'unità. Si ha quindi un comportamento molto buono degli upper bound dal punto di vista pratico. Tuttavia, non è noto in generale il loro comportamento «asintotico» sull'insieme delle istanze del PLP.

2. – Risultati conseguiti.

La tesi affronta aspetti sia teorici che computazionali. Per quanto riguarda l'ambito teorico, vengono evidenziati i cattivi comportamenti «asintotici» di alcuni noti upper bound. In particolare viene dimostrato che l'upper bound LP di Isermann e il bound di Barnes possono discostarsi dall'ottimo per valori arbitrariamente grandi, sull'insieme delle istanze del PLP. Nel caso del bound di Barnes il risultato è per certi versi sorprendente, se confrontato col teorema corrispondente. Viene inoltre dimostrato per la prima volta che la variante del teorema di Dowsland presentata da Exeler è in realtà falsa.

Recentemente è stata proposta la nozione di struttura k-block (Terno e Scheithauer [3]), una generalizzazione del concetto di pattern a ghigliottina. Si tratta in effetti di strutture di pattern definite ricorsivamente, che si sono rivelate molto utili per la formulazione di euristiche efficaci per il PLP. Nella tesi è stato studiato il problema della riducibilità e della generazione algoritmica di queste strutture, anche in prospettiva di un loro utilizzo in un algoritmo esatto.

In ambito computazionale è stato affrontato lo studio di nuovi metodi per un algoritmo esatto di tipo tree search. Alcune delle tecniche introdotte sono studiate nel caso più generale del Rectangle Packing Problem, che riguarda l'impaccamento ottimale di rettangoli non identici. L'algoritmo risultante effettua una ricerca ottimizzata che evita la generazione ripetuta di uno stesso pattern, problema non banale nel caso del Rectangle Packing Problem, e riduce l'albero di ricerca in base a criteri di dominanza ed equivalenza.

Nel caso particolare del PLP viene introdotto un nuovo bound per il backtracking, che valuta la possibilità di completare in modo ottimale un impaccamento parziale di box $l \times w$ considerando i completamenti effettuabili con box $l \times 1$ o $w \times 1$.

I test numerici mostrano che le diverse tecniche adottate contribuiscono in maniera determinante alla riduzione dell'albero di ricerca e dei tempi di calcolo. Il confronto è effettuato con le euristiche recenti: l'euristica G-4 di Terno e Scheithauer [3], basata sulla ricerca di pattern 4-block massimali, e l'euristica di Morabito e Morales [4] che effettua la ricerca di pattern 5-block massimali. Queste euristiche hanno mostrato di raggiungere quasi sempre l'ottimalità nei problemi test standard.

Si conclude che nella maggior parte dei casi l'algoritmo esatto ha prestazioni simili a quelle delle euristiche, per quanto riguarda i tempi di calcolo. Nel contempo, si hanno discrete prestazioni per le istanze non risolte all'ottimalità dalle euristiche. Le tecniche utilizzate nell'algoritmo esatto, alcune delle quali possono essere applicate anche al Rectangle Packing Problem, consentono quindi di risolvere in maniera efficace le istanze-test standard del PLP.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. W. BARNES, *Packing the maximum number of $m \times n$ tiles in a large $p \times q$ rectangle,* Discrete Math, **26** (1979), 93-100.

[2] K. A. DOWSLAND, *The three-dimensional pallet chart: an analysis of the factors affecting the set of feasible layouts for a class of two-dimensional packing problems,* J. Opl Res. Soc., **35** (1984), 895-905.

[3] G. Scheithauer e J. Terno, *The G4-heuristic for the pallet loading problem,* J. Opl Res. Soc., **47** (1996), 511-522.

[4] R. Morabito e S. Morales, *A simple and effective recursive procedure for the manufacturer's pallet loading problem,* J. Opl Res. Soc, **49** (1998), 819-828.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova
e-mail: bettin@math.unipd.it
Dottorato in Matematica Computazionale (sede amministrativa: Padova) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Matteo Fischetti, Università di Padova