BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

GIUSEPPINA G. BARBIERI

Misure su Δ-ℓ-semigruppi e su MV-algebre

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.3, p. 267–270.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_3_267_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie 8, Vol. III-A, Dicembre 2000, 267-270

Misure su Δ-ℓ-semigruppi e su MV-algebre.

Giuseppina Gerarda Barbieri

Nello studio di misure su algebre booleane (o algebre di insiemi) i metodi topologici introdotti da Fréchet e Nikodym sono un potente ed elegante strumento. Drewnowski avviò l'applicazione di siffatte topologie, da lui chiamate FN-topologie, nella sua tesi di dottorato. Dopo di lui, nell'ultimo trentennio, queste sono state usate sistematicamente in teoria della misura; una guida per quanto riguarda i risultati classici ottenuti lungo questo filone di indagine è il lavoro di de Lucia [3]. Un nuovo metodo di studio e applicazione delle FN-topologie alla teoria della misura, che consente di ottenere in maniera semplice e unificata risultati vecchi e nuovi, è dato da Weber in [5]. Scopo di questa tesi è trasferire tale approccio topologico alla teoria delle misure fuzzy ($= T_\infty$-valutazioni nel senso di [2]).

Per misura fuzzy intendiamo una funzione μ definita su un clan C di insiemi fuzzy t.c. $\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g)$ se $f, g \in C$ e $f+g \leq 1$; un clan di insiemi fuzzy è una famiglia C di insiemi fuzzy t.c. $1 \in C$ e $(f-g) \vee 0$ se $f, g \in C$; un insieme fuzzy è un'applicazione A a valori in $[0, 1]$, il valore $A(x)$ è interpretato come grado di appartenenza di x ad A. Le misure finitamente additive definite su anelli booleani, sono un esempio, banale, di misura fuzzy.

Ora, per realizzare tale approccio topologico per siffatte misure fuzzy, ci necessita come dominio delle misure fuzzy, anziché un clan di insiemi fuzzy, una struttura più generale, che è definita attraverso equazioni e perciò chiusa rispetto a quozienti e completamenti uniformi. Una struttura che soddisfa a questi requisiti e ci è sembrata adeguata allo scopo è il Δ-ℓ-semigruppo introdotto da Weber in [4].

Definizione. – *$(P, \leq, +, \Delta)$ è un Δ-ℓ-semigruppo se $(P, \leq)$ è un reticolo, $(P, +)$ è un semigruppo commutativo, $\Delta : (y, x) \to y\Delta x$ è un'applicazione da $\{(y, x) \in P^2 : x \leq y\}$ tale che per tutti gli $x, y, z \in P$ vale:*

(P1) $x \leq x + y$,

(P2) $x \leq y \leq z + x$ implica $y\Delta x \leq z$,

(P3) $y = y\Delta x + x$ se $x \leq y$.

L'appena definita operazione parziale Δ si estende a P^2 per mezzo della formula $x\Delta y := (x \vee y)\Delta(x \wedge y)$.

Definizione. – *Una funzione μ definita su P a valori in un gruppo è una misura se $\mu(y) = \mu(y\Delta x) + \mu(x)$ allorquando $x, y \in P$ e $x \leq y$.*

Esempi di Δ-ℓ-semigruppi sono, oltre ai clan di insiemi fuzzy, lo spazio di tutte le funzioni a valori in $[0, +\infty]$ definite su un insieme non vuoto, il cono positivo di l-gruppi commutativi, gli anelli booleani e le MV-algebre (Una MV-algebra è una struttura che generalizza l'algebra booleana e rappresenta la controparte algebrica alla logica multivalori, elaborata da Lukasiewicz, così come l'algebra booleana rappresenta la controparte algebrica alla logica a due valori). Perciò il fatto di prendere Δ-ℓ-semigruppi come domini delle misure ci permette di trattare allo stesso tempo le misure fuzzy nel senso di [2], le misure definite su anelli booleani a valori in un gruppo e gli omomorfismi definiti sugli ℓ-gruppi, in particolare gli operatori lineari definiti sugli spazi di Riesz. Pertanto, i nostri risultati abbracciano e, quindi, estendono risultati classici di teoria della misura definita su anelli booleani e, in taluni casi (vedi Hewitt-Yosida), risultati per omomorfismi definiti su ℓ-gruppi commutativi; inoltre, arricchiscono di risultati nuovi la teoria della misura fuzzy.

Commentiamo, brevemente, il metodo utilizzato per pervenire a tali risultati. A partire da una misura μ, in modo naturale, si introduce una uniformità; ad esempio, supponendo che μ sia a valori reali positivi, si introduce la semimetrica $d_\mu(x, y) := \mu(x \Delta y)$. Tale uniformità, detta μ-uniformità, rende uniformemente continue le operazioni di P ($\wedge$, $\vee$, $+$, Δ) e rende uniformemente continua μ. Risulta, quindi, motivato lo studio delle uniformità che rendono uniformemente continue le operazioni di P, denotiamo tale spazio con $LUA(P)$. Questo è un reticolo distributivo completo. Di più, $LUA(P, W)$, il sottoinsieme di $LUA(P)$ costituito dalle uniformità meno fini di $W = \mu$-uniformità, ove μ è una misura esaustiva, è un'algebra boolena. Il risultato si ottiene mediante la costruzione di un isomorfismo tra $LUA(P, W)$ e il centro di $(\widetilde{P}, \widetilde{W})$, completamento separato di (P, W). Ricordiamo che il centro di $\widetilde{P}$ è la più grande algebra booleana contenuta in $\widetilde{P}$, pertanto $LUA(P, W)$, essendo isomorfo ad un'algebra booleana è esso stesso un'algebra booleana. Ciò è essenziale al fine di ottenere teoremi di decomposizione per misure, teoremi che si basano sul seguente teorema.

TEOREMA. – *Ogni misura esaustiva definita su P si decompone come somma di due misure, una continua e l'altra singolare rispetto ad una uniformità $U \in LUA(P)$.*

Difatti, il teorema precedente abbraccia, per opportune scelte dell'uniformità U i più classici teoremi di decomposizione per misure a valori in gruppi (Lebesgue, Hewitt-Yosida, atomic-atomless). Il punto cruciale della sua dimostrazione è il cosiddetto passaggio al completamento. Si considera dapprima, anziché μ, la sua estensione uniformemente continua $\tilde{\mu}$ sul completamento $\widetilde{P}$. Tale misura gode di proprietà più forti rispetto a μ: $\tilde{\mu}$ è continua rispetto all'ordine, il suo dominio $\widetilde{P}$ risulta essere una MV-algebra completa anche dal punto di vista reticolare, quindi $\tilde{\mu}$ è più trattabile; si decompone $\tilde{\mu}$ attraverso un elemento a del centro, $\tilde{\mu}(x) = \tilde{\mu}(x \wedge a) + \tilde{\mu}(x \wedge a^c)$, la restrizione a P produce la desiderata decomposizione per μ.

Utilizzando tecniche similari si dimostra un teorema di decomposizione che generalizza quanto Hammer e Sobczyk provarono:

TEOREMA. – *Se A è un'algebra booleana con elemento massimo* 1 *e* μ: $A \to [0, \infty)$ *è una misura finitamente additiva, allora esistono misure finitamente additive a due valori* μ_n: $A \to [0, +\infty)$ *tali che* $\mu = \lambda + \sum_{n \in I} \mu_n$ *dove* $I \subseteq \mathbb{N}$, *e la misura* λ *è "continua" nel senso seguente:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists a_1, \ldots, a_n \in A \quad 1 = \bigvee_{i=1}^{n} a_i \quad e \quad \lambda(a_i) < \varepsilon \, .$$

Per generalizzare questo teorema per misure a valori in un Δ-ℓ-semigruppo, mostriamo dapprima che ogni MV-algebra completa L si decompone nella forma $L = L_0 \times \pi_{i \in I} C_i$, ove L_0 è una MV-algebra connessa e senza atomi e C_i sono catene finite con la topologia discreta. Questa decomposizione corrisponde alla decomposizione di un'algebra booleana completa $A = A_0 \times \{0, 1\}^I$ in una parte senza atomi A_0 e in una parte atomica $\{0, 1\}^I$.

Lo stesso metodo topologico del completamento permette di stabilire l'esistenza di un isomorfismo tra lo spazio di tutte le misure esaustive definite su P e l'insieme delle misure classicamente intese definite su un'opportuna algebra booleana (vale il dire il centro di $\widetilde{P}$), ciò vale nel caso in cui le misure sono a valori in uno spazio lineare localmente convesso; l'isomorfismo non è più valido se le misure sono a valori in un gruppo topologico. Grazie a tale isomorfismo si riesce a trasferire, direttamente, i risultati classici validi per misure classicamente intese definite su algebre booleane complete al contesto di misure definite su Δ-ℓ-semigruppi e su MV-algebre. Ad esempio, si ottengono in questo modo i risultati seguenti.

TEOREMA. – (Il controllo) *Ogni misura* $\mu : P \to E$ *esaustiva a valori in uno spazio di Banach* E *ammette un controllo del tipo* $x' \circ \mu$ *con* $x' \in E'$, *i.e.* $x' \circ \mu$*-uniformitá* $=$ μ*-uniformitá.*

TEOREMA. – (Vitali-Hahn-Saks-Nikodym) *Una successione di misure esaustive, definite su un Δ-ℓ-semigruppo σ-completo a valori in uno spazio lineare localmente convesso, puntualmente convergente è uniformemente esaustiva.*

TEOREMA. – (Limitatezza Nikodym) *Una famiglia di misure esaustive, definite su un Δ-ℓ-semigruppo σ-completo a valori in uno spazio lineare localmente convesso, puntualmente limitate è uniformemente limitata.*

TEOREMA. – (Lyapunov) *Una misura sequenzialmente continua rispetto all'ordine, definita su un Δ-ℓ-semigruppo σ-completo a valori in $\mathbb{R}^n$ ha codominio compatto, se è senza atomi ha codominio convesso.*

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Barbieri e H. Weber: A topological approach to the study of fuzzy measures, Abramovich, Avgerinos, Yannelis (Eds.), Functional Analysis and Economic Theory, Springer (1998), 17-46.

[2] D. Butnariu e E. P. Klement: Triangular Norm Based Measures and Games with Fuzzy Coalitions, Kluwer, Acad. Publ., Dordrecht, Holland (1993).

[3] P. de Lucia: Misure a valori in un gruppo topologico, *Quaderni UMI* (1984).

[4] H. Weber: $\mathbb{R}$-freie Integrationstheorie I,II, *J. Reine Angew. Math.*, **289** (1977), 30-54 e **290** (1977), 1-23.

[5] H. Weber: Group- and vector-valued s-bounded contents, in: *Measure Theory (Oberwolfach, 1983)*, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 1089, Springer-Verlag (1984), pp. 181-198.

Dipartimento di Matematica, Università di Udine
e-mail: barbieri@dimi.uniud.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Weber, Università di Udine