Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Francesca Galluzzi

Varietà abeliane di tipo Mumford

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 81–84.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_81_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 81-84

Varietà abeliane di tipo Mumford.

FEDERICA GALLUZZI

Questa tesi ha per argomento le varietà abeliane complesse di tipo Mumford, vale a dire le fibre generiche delle famiglie di varietà abeliane complesse di dimensione quattro costruite da Mumford in [4]. Tali famiglie sono parametrizzate dal quoziente di un dominio simmetrico limitato per l'azione di un gruppo discreto.

Esse hanno costituito il primo esempio in dimensione quattro di famiglie di varietà abeliane non caratterizzate dalla loro algebra di endomorfismi e aventi gruppo di Mumford-Tate più piccolo del gruppo simplettico. Ricordiamo che le varietà abeliane generiche hanno gruppo di Mumford-Tate isomorfo al gruppo simplettico.

Inoltre, mentre è verificata la congettura di Hodge per una varietà di tipo Mumford, nulla si sa per i loro prodotti e non è tuttora noto se tali varietà siano isogene o meno a jacobiane.

Nella tesi ci occupiamo di vari aspetti dello studio di queste varietà. Un primo approccio è stato quello di studiare nel dettaglio la costruzione di Mumford e ciò ci ci ha consentito di poter fornire, per la prima volta, una classe di esempi espliciti di famiglie. A questo proposito ricordiamo i dettagli della costruzione di Mumford. Sia A un'algebra di quaternioni su un'estensione cubica totalmente reale K di $\mathbb{Q}$ e sia $Cor_{K/\mathbb{Q}}(A)$ la corestrizione di A, vale a dire la $\mathbb{Q}$-sottoalgebra di $A^{\otimes 3}$ costituita dagli invarianti

$$Cor_{K/\mathbb{Q}}(A) = (A^{\otimes 3})^{Gal(K/\mathbb{Q})}$$

sotto l'azione del gruppo di Galois di K su $\mathbb{Q}$ che denoteremo con $Gal(K/\mathbb{Q})$. La corestrizione $Cor_{K/\mathbb{Q}}(A)$ di A su $\mathbb{Q}$ è un'algebra semplice centrale su $\mathbb{Q}$. La costruzione di Mumford si basa su due condizioni sull'algebra $Cor_{K/\mathbb{Q}}(A)$:

$M1$) $\mathrm{Cor}_{K/\mathbb{Q}}(A) \cong M_8(\mathbb{Q})$

$M2$) $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \oplus M(2, \mathbb{R})$,

dove $\mathbb{H}$ è l'algebra dei quaternioni hamiltoniani. Abbiamo quindi la mappa

$$\begin{aligned} Nm : A &\rightarrow Cor_{K/\mathbb{Q}}(A)(\subset A \otimes A \otimes A) \cong M_8(\mathbb{Q}) \\ a &\mapsto \qquad a \otimes a \otimes a\,. \end{aligned}$$

Se N la norma canonica dell'algebra A, definiamo $G := \{x \in A^* : N(x) = 1\}$. G è un gruppo algebrico su $\mathbb{Q}$ e se $V = \mathbb{Q}^8$ allora, via Nm, ha una rappresentazione in V: $\alpha : G \rightarrow GL(V)$ che su $\mathbb{R}$ diventa

$$SU(2) \times SU(2) \times SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SO(4) \times SL(2, \mathbb{R})\,.$$

Sia ora Λ un reticolo in V e scriviamo $V_{\mathbb{R}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Utilizzando la mappa α definiamo un omomorfismo di gruppi algebrici reali $h : S^1 \to GL(V_{\mathbb{R}})$ dove $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Le condizioni di Riemann affinché il toro complesso $(V_{\mathbb{R}}, h)/\Lambda$ sia una varietà abeliana possono essere date in termini dell'omomorfismo h. A questo punto abbiamo definito la «fibra centrale» della famiglia che è $X_h = (V_{\mathbb{R}}, h)/\Lambda$ e che può essere deformata a una varietà X_g, con $g \in G$, semplicemente sostituendo h con $\alpha(g)\, h\alpha(g)^{-1}$. Sotto opportune condizioni le varietà abeliane X_g, $X_{g'}$ risultano essere isomorfe se e solo se g and g' sono nella stessa classe laterale di $\Gamma \backslash G^0(\mathbb{R})/K^0$, dove $G^0(\mathbb{R})$ è la componente connessa dell'identità di $G(\mathbb{R})$, K^0 è un sottogruppo compatto massimale di $G^0(\mathbb{R})$ e $\Gamma \subseteq G$ un sottogruppo discreto tale che $\alpha(\Gamma)$ preservi Λ. In questo modo si ottiene uno spazio analitico fibrato su $\Gamma \backslash G^0(\mathbb{R})/K^0$ (cfr. [4]). Questa famiglia costituisce un tipo particolare di famiglia di Kuga così come definita in [3].

Come già accennato in precedenza, una fibra generica in una famiglia di questo tipo è una *varietà di tipo Mumford.*

Per produrre esempi abbiamo avuto bisogno di studiare in modo approfondito il concetto algebrico di corestrizione di un'algebra di quaternioni. Abbiamo inoltre usato l'osservazione fondamentale di Mumford che dimostra che le famiglie da lui costruite sono caratterizzate dal fatto di avere fibre di tipo CM, cioè varietà con algebra degli endomorfismi isomorfa ad un'estensione quadratica immaginaria di un campo totalmente reale. Il nostro risultato riguarda quindi la costruzione di esempi espliciti a partire da assegnate varietà di tipo CM come fibre. Ricordiamo che, per definizione, se K è un campo di numeri, con $A = (d, e)_K$ si indica l'algebra di quaternioni con $K-$base data dagli elementi $1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in A$ che soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} \varepsilon_1^2 = d\,, \\ \varepsilon_2^2 = e\,, & \qquad d, e \in K\,. \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -\varepsilon_2 \varepsilon_1 \end{cases}$$

Dati ora K cubico totalmente reale e $Gal(K/\mathbb{Q}) = \{id, \sigma, \sigma^2\}$ il gruppo di Galois di K su $\mathbb{Q}$, fissiamo un'immersione $K \hookrightarrow \mathbb{R}$ e identifichiamo $Gal(K/\mathbb{Q})$ con $\mathrm{Hom}(K, \mathbb{R})$. Il risultato è il seguente

TEOREMA 1. – Siano dati

i) $K = \mathbb{Q}(e)$ un'estensione cubica totalmente reale di $\mathbb{Q}$ con $e > 0$, $\sigma(e) < 0$, $\sigma^2(e) < 0$,

ii) $L = \mathbb{Q}(e, \delta)$ un campo CM ciclico di grado sei con $\delta = \sqrt{d}$, $d < 0 \in \mathbb{Q}$,

iii) $N_{K/\mathbb{Q}}(e) = w\overline{w}$ con $w \in L$,

iv) Y una varietà tridimensionale di tipo CM $End^0(Y) = L$ e polarizzazione data da $E(x, y) = Tr_{L/\mathbb{Q}}(\sigma(e)\, \delta xy)$,

v) C una curva ellittica di tipo CM con $End^0(C) = F = \mathbb{Q}(\delta)$.

Allora $Y \times C$ è una fibra CM in una famiglia di Mumford con algebra di quaternioni $A = (d, e)_K$.

A titolo di esempio costruiamo infine una famiglia di tipo Mumford avente come fibra CM la varietà $Y \times E$ dove Y è la Jacobiana della curva iperellittica definita dall'equazione $y^2 = x^7 - 1$ e E è una curva ellittica di tipo CM con $End^o(E) = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$.

Ci siamo poi occupati dello studio della struttura di Hodge delle varietà di Mumford che analizziamo usando la teoria dei gruppi di Mumford-Tate delle strutture di Hodge polarizzate. I gruppi di Mumford-Tate sono stati introdotti da Mumford per le varietà abeliane, ma la loro definizione è stata poi generalizzata a ogni struttura di Hodge in [1]. Essi sono uno strumento di fondamentale importanza per lo studio della struttura di Hodge di una varietà abeliana come vedremo tra breve. Se X è una tale varietà, denotiamo $V = H^1(X, \mathbb{Q})$. Il gruppo di Mumford-Tate $MT(X)$ di X è il più piccolo sottogruppo di $GL(V)$ i cui punti reali contengano l'immagine della mappa

$$h : S^1 \to GL(V_{\mathbb{R}})$$

che definisce la struttura complessa della varietà X. Esso agisce quindi in modo naturale su V e sulle potenze tensoriali $V^{\otimes n}$. Il legame tra tali rappresentazioni e struttura di Hodge di X è evidenziato da un risultato presente in [1] dove si dimostra l'esistenza di una corrispondenza $1-1$ tra $\mathbb{Q}$-sottorappresentazioni di $MT(X)$ e sottostrutture di Hodge di $V^{\otimes n}$. Inoltre le classi di Hodge di $V^{\otimes n}$ sono esattamente gli invarianti per l'azione di $MT(X)$, altro risultato contenuto in [1].

Dalla costruzione si vede che il gruppo di Mumford-Tate di una varietà di Mumford è isogeno a $SL(2)^3$ e quindi nella tesi studiamo le rappresentazioni di tale gruppo. In particolare, guardiamo alle rappresentazioni $\bigwedge^i$, $i = 1, \ldots, 4$ per poi tradurre i risultati in termini di strutture di Hodge e in questo modo otteniamo di nuovo il risultato di Hazama (cfr. [5.1, 2])

PROPOSIZIONE 1. – Sia X una varietà di tipo Mumford, allora si ha

i) $B^p(X) \cong \mathbb{Q}$ per $p = 0, 1, 2$.

ii) $B^2(X \times X) \neq \bigwedge^2 B^1(X \times X)$

dove $B^p(X) = H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X)$ sono i cicli di Hodge di X.

Da ciò segue immediatamente che la congettura di Hodge vale per X, mentre va verificata sulle classi eccezionale presenti in $B^2(X \times X)$. Esibiamo poi esplicitamente tali classi eccezionali che sono generate in modo naturale dalla forma di killing dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2)^3$ e ne diamo una interpretazione in termini della geometria delle rette di $\mathbb{P}^7$.

Forniamo poi una lista di tutte le sottostrutture di Hodge di $V^{\otimes n}$ e ne calcoliamo i numeri di Hodge. Più precisamente, sia W_n la rappresentazione irriducibile di dimensione $n+1$ dell'algebra di Lie $\mathfrak{sl}(2)$. Allora $W_n = S^n W_1$, n-esima potenza simmetrica della rappresentazione standard W_1. Se V_1, V_2, V_3 sono rappresentazioni irriducibili di $\mathfrak{sl}(2)$, denotiamo con $V_1 \boxtimes V_2 \boxtimes V_3$ la rappresentazione di $\mathfrak{sl}(2)^3$ su $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ dove $(g_1, g_2, g_3) \in \mathfrak{sl}(2)^3$ agisce tramite ciascun g_i sulla i-esima componente del prodotto tensoriale. Ogni rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{sl}(2)^3$

è del tipo

$$W_{a,b,c} := W_a \boxtimes W_b \boxtimes W_c \qquad \text{con} \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Studiando i prodotti tensoriali di queste rappresentazioni, otteniamo il seguente

TEOREMA 2. – Sia X una varietà di tipo Mumford e sia $V = H^1(X, \mathbb{Q})$. Le sottorappresentazioni irriducibili di $SL(2)^3$ in $V^{\otimes n}$ sono esattamente quelle che contengono una rappresentazione della forma $W_{2l, 2k, 2m}$, se n è pari e $W_{2l+1, 2k+1, 2m+1}$, se n è dispari.

L'ultima parte della tesi è dedicata alla dimostrazione dell'esistenza di un legame tra varietà X di tipo Mumford e varietà di Kuga-Satake. Le varietà di Kuga-Satake sono varietà abeliane associate a strutture di Hodge di peso due e costituiscono un valido strumento di indagine nello lo studio della congettura di Hodge per le varietà abeliane come ben evidenziato in [5].

Per dimostrare il legame esistente tra queste due classi di varietà, usiamo una sottostruttura di Hodge $W \subsetneq V^{\otimes 2}$ che troviamo applicando le stesse tecniche usate precedentemente per dimostrare il Teorema 0.3 e troviamo infine il seguente risultato che può essere interessante per studiare la congettura di Hodge su $X \times X$.

TEOREMA 3. – Se X è una varietà tipo Mumford, allora ad essa è possibile associare una varietà di Kuga-Satake $KS(X)$ che è isogena a $(X \times X)^{16}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. DELIGNE, J. S. MILNE, A. OGUS, K. SHIH, *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties*, LNM 900 (1982), 199-200.

[2] F. HAZAMA, *Algebraic cycles on certain abelian varieties and powers of special surfaces*, J.Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **31** (1984), 487-520.

[3] M. KUGA, *Fiber varieties over a symmetric space whose fibers are abelian varieties in «Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups»*, Amer. Math. Soc., Providence R.I., **9** (1966), 338-346.

[4] D. MUMFORD, *Anote of Shimura's Paper «Discontinuous Groups and Abelian Varieties»*, Math.Ann., **81** (1969), 345-351.

[5] B. VAN GEEMEN, *Kuga-Satake Varieties and the Hodge Conjecture*, to appear in «The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles», Proceedings of the NATO ASI and CRM Summer School in Banff Eds. J. Lewis et al.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino
Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino. E-mail: galluzzi@dm.unito.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Genova) - X Ciclo
Direttore di Ricerca: Prof. Lambertus Van Geemen (Università di Pavia)