Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Walter Dambrosio

Problemi ai limiti per equazioni differenziali del secondo ordine fortemente nonlineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 53–56.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_53_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 53-56

Problemi ai limiti per equazioni differenziali del secondo ordine fortemente nonlineari.

WALTER DAMBROSIO

In questa tesi ci occupiamo dello studio di problemi ai limiti, sulla palla unitaria $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$, associati ad un'equazione del tipo

$$\Delta u + f(|x|, u) = 0, \quad x \in \Omega ,$$

dove $f : [0, 1] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua.

Per il carattere di questa nota e per la sua brevità, prenderemo solo in considerazione il caso in cui f non dipende dalla variabile spaziale $x \in \Omega$; faremo quindi riferimento all'equazione

$$\text{(E)} \qquad \Delta u + f(u) = 0 .$$

Inoltre, per le stesse ragioni, non esporremo i risultati nella loro massima generalità, privilegiando il più possibile un taglio divulgativo.

È comunque importante evidenziare il fatto che parte della tesi è dedicata allo studio di equazioni in cui compaiono operatori diversi dal laplaciano, quali ad esempio il p-laplaciano o l'operatore di curvatura media. Non ci soffermeremo ulteriormente su questa questione e sulla sua significatività da un punto di vista fisico-meccanico, rimandando i lettori all'esaustiva monografia [3].

Nel corso degli anni, numerosi risultati di esistenza e molteplicità di soluzioni per problemi ai limiti associati a (1) sono stati ottenuti da vari autori, con differenti ipotesi sulla nonlinearità f; a questo proposito, è stato più volte ipotizzato, seguendo una importante congettura di A. C. Lazer e P. J. McKenna [5] del 1983, che il numero delle soluzioni di (1) dipenderebbe dal numero degli autovalori del problema linearizzato «attraversati dalla nonlinearità nel passare da zero all'infinito» (per maggior precisione, vedere ad esempio le ipotesi (H1)-(H2)-(H3) successive).

Questa supposizione è vera, nel caso dell'equazione ordinaria, corrispondente a $N = 1$, quando f soddisfa una condizione di tipo asintoticamente lineare o superlineare all'infinito; più precisamente, nel primo caso è stata provata l'esistenza di un determinato numero di soluzioni, in dipendenza dal numero di autovalori che cadono nell'intervallo (f_0, f_∞) o (f_∞, f_0), essendo $f_\infty = \lim_{u \to \infty} f(u)/u$ e $f_0 = \lim_{u \to 0} f(u)/u$, mentre il secondo caso è caratterizzato dalla presenza di infinite soluzioni di energia arbitrariamente grande (si veda ad esempio [2]).

Va peraltro precisato che nel caso del problema in $\mathbf{R}^N$, anche quando f è asintoticamente lineare, sono stati forniti controesempi all'esistenza di soluzioni multiple.

In questa tesi ci occupiamo di nonlinearità che soddisfano condizioni superlineari asimmetriche all'infinito oppure sublineari in zero, nel senso precisato di seguito.

Problemi superlineari asimmetrici all'infinito.

Studiamo il problema di Neumann associato all'equazione (E) nel caso $N=1$, i.e.:

$$(N) \qquad \begin{cases} u'' + f(u) = 0 \\ u'(0) = 0 = u'(1). \end{cases}$$

Le ipotesi principali riguardano il comportamento di f all'infinito ed in zero; più precisamente, si suppone

(H1) f è *superlineare asimmetrica all'infinito*:

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty, \qquad \lim_{u \to -\infty} \frac{f(u)}{u} = f_\infty;$$

(H2) vale la seguente relazione:

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = f_0;$$

(H3) esistono due interi $l \in \mathbf{N}$ e $j \in \mathbf{N}$ tali che

$$\left(\frac{\pi l}{2}\right)^2 < f_\infty < \left(\frac{\pi(l+1)}{2}\right)^2 \qquad \text{e} \qquad (\pi j)^2 < f_0 < (\pi(j+1))^2.$$

Sotto queste ipotesi, vale il seguente risultato:

TEOREMA 1. – *Supponiamo che valgano le ipotesi* $(H1)$-$(H2)$-$(H3)$. *Denotiamo con I l'intervallo* $[j+1, l]$ *se* $j < l$ *o l'intervallo* $[l+1, j]$ *se* $j > l$. *Allora, per ogni intero* $n \in I$ *esistono due soluzioni* u_n *e* v_n *del problema ai limiti* (N) *entrambe aventi esattamente* n *zeri in* $[0, 1)$ *e con* $u_n(0) >$ *e* $v_n(0) < 0$.

Osserviamo che l'ipotesi (H3) richiede un controllo sui numeri f_∞ e f_0 rispetto agli autovalori del problema linearizzato; pertanto, il risultato del Teorema 1 afferma proprio che il problema considerato ammette un certo numero di soluzioni dipendente dal numero degli autovalori attraversati da f passando da zero all'infinito.

Il teorema esposto generalizza alcuni risultati precedenti relativi a problemi superlineari asimmetrici (si veda ad esempio [4]); va sottolineato il fatto che i lavori presenti in letteratura garantiscono solo l'esistenza (eventualmente anche per il problema ellittico in $\mathbf{R}^N$) e non la molteplicità di soluzioni.

La dimostrazione del Teorema 1 è basata sull'applicazione di metodi di grado topologico; più precisamente, si sfrutta la combinazione di un *metodo di continuazione*, nello spirito di [2], e di una *tecnica di mappe-tempo* per lo studio di particolari problemi autonomi. Evidenziamo il fatto che, in un capitolo indipendente ed originale della tesi, questa tecnica viene sviluppata in grande generalità per ottenere risultati di esistenza e molteplicità nel caso di equazioni contenenti operatori del secondo ordine fortemente nonlineari.

Problemi sublineari in zero.

In questo caso, consideriamo il problema di Dirichlet associato all'equazione (E) nel caso generale $N \geqslant 1$, i.e.:

$$(D) \qquad \begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

essendo Ω la palla unitaria di $\mathbf{R}^N$. L'ipotesi principale riguarda il comportamento di f in zero; per questo motivo, è sufficiente richiedere che esista $\varepsilon_0 > 0$ tale che f sia definita e continua solo su $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Introduciamo le seguenti condizioni:

(K1) f è *sublineare in zero*, cioè:

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = +\infty\,;$$

(K2) f è dispari. Consideriamo inoltre la parametrizzazione standard di Ω in coordinate polari (r, θ_i) $(i = 1, \ldots, N-1)$:

$$\Omega = \{(r, \theta_1, \ldots, \theta_{N-1}) \mid r \in [0,1],\ \theta_i \in [0, \pi],\ i = 1, \ldots, N-2,\ \theta_{N-1} \in [-\pi, \pi]\}\,.$$

Valgono i seguenti risultati:

TEOREMA 2. – *Supponiamo che valga l'ipotesi* (*K*1). *Allora, esiste* $\tilde{n} \in \mathbf{N}$ *tale che per ogni* $n > \tilde{n}$ *il problema* (*D*) *ha almeno due soluzioni radiali* u_n *e* v_n *con* $u_n(0) > 0$ *e* $v_n(0) < 0$, *entrambe aventi esattamente* n *zeri in* $[0, 1)$. *Inoltre abbiamo*:

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n(r)| + |u_n'(r)| = 0 = \lim_{n \to +\infty} |v_n(r)| + |v_n'(r)| \quad \text{uniformemente in } r \in [0,1]\,.$$

TEOREMA 3. – *Supponiamo che valgano le ipotesi* (*K*1)-(*K*2). *Se* $f \in C^{0,\alpha}([-\varepsilon_0, \varepsilon_0])$, *per qualche* $\alpha \in (0, 1)$, *allora esiste* $n^* \in \mathbf{N}$ *tale che per ogni* $n \geqslant n^*$ *il problema* (*D*) *ha almeno due soluzioni non-radiali,* u_n^* *e* v_n^*, $2\pi/n$-*periodiche e dispari in* θ_{N-1}.

Lo studio di problemi sublineari è stato relativamente poco affrontato in letteratura, principalmente a causa della perdita di regolarità della funzione f dovuta all'ipotesi (H1); un importante contributo si deve a G. J. Butler [1], che ha provato l'esistenza di infinite soluzioni periodiche, nel caso dell'equazione ordinaria. Precisiamo comunque che nell'articolo di Butler, come anche negli altri lavori con condizioni sublineari presenti in letteratura, (H1) è accompagnata da ipotesi sul comportamento di f all'infinito.

Come nel caso del problema superlineare asimmetrico all'infinito, il Teorema 2 si dimostra tramite l'uso di metodi topologici; il Teorema 3 è invece una conseguenza dell'applicazione del metodo diretto del calcolo delle variazioni, unitamente a stime di regolarità per problemi ellittici.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUTLER G. J., *Periodic solutions of sublinear second order differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **62** (1978), 676-690.

[2] CAPIETTO A., MAWHIN J. and ZANOLIN F., *A Continuation Approach to Superlinear Periodic Boundary Value Problems*, J. Differential Equations, 88 (1990), 347-395.

[3] DIAZ J. I., HERRERO M. A., LIÑÁN A. and VÀZQUEZ J. L., *Free boundary problems: theory and applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **323** (1995), 1-219.

[4] FABRY C. and HABETS P., *Periodic solutions of second order differential equations with superlinear asymmetric nonlinearities*, Arch. Mat., **60** (1993), 266-276.

[5] LAZER A. C. and MCKENNA P. J., *On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, **95** (1983), 275-283.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino
Via Carlo Alberto 10, 10123 Torino. Indirizzo E-mail: walterd@dm.unito.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amminstrativa: Torino) - Ciclo X
Direttore di Ricerca: Prof.ssa Anna Capietto (Università di Torino)