
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

FRANCESCA DA LIO

Propagazione dei massimi e unicità di soluzioni di viscosità di equazioni completamente non lineari del primo e del secondo ordine

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.1S, p. 49–52.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_49_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_49_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Propagazione dei massimi e unicità di soluzioni di viscosità di equazioni completamente non lineari del primo e del secondo ordine.

FRANCESCA DA LIO

I risultati di questa tesi si possono dividere in due parti. Nella prima parte si studia il Principio di Massimo Forte per equazioni differenziali alle derivate parziali completamente non lineari del tipo

$$(1) \quad F(x, u, Du, D^2u) = 0, \quad \text{in } \Omega,$$

dove $F: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S(N) \rightarrow \mathbb{R}$, è propria nel senso di [3] ossia soddisfa la seguente condizione di monotonia:

$$(2) \quad F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, Y), \quad \text{se } r \leq s \text{ e } Y \leq X,$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme aperto e connesso, Du, D^2u denotano rispettivamente il gradiente e la matrice Hessiana di u e $S(N)$ è l'insieme delle matrici simmetriche di ordine N . Si decrive inoltre l'insieme di propagazione dei massimi di sottosoluzioni di equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman del 2° ordine. Nella seconda parte proviamo un teorema di unicità per equazioni differenziali non lineari del 1° ordine corrispondenti ad una classe particolare di problemi di controllo. Tali risultati sono stati ottenuti nell'ambito della teoria delle soluzioni di viscosità.

Per Principio di Massimo e di Minimo Forte (nel seguito PMaxF e PMinF) intendiamo le seguenti due proprietà:

PMaxF: *ogni sottosoluzione di viscosità u semicontinua superiormente in Ω (in breve $u \in \text{SCS}(\Omega)$) di (1) che assume un massimo non negativo in Ω è costante.*

PMinF: *ogni soprasoluzione di viscosità u semicontinua inferiormente in Ω (in breve $u \in \text{SCI}(\Omega)$) di (1) che assume un minimo non positivo in Ω è costante.*

L'obiettivo è stato quello di determinare le condizioni minime sull'operatore F affinché valga il PMaxF per equazioni del tipo (1). Nel capitolo 1 della tesi si è provato che il PMaxF vale se F è SCI e soddisfa le seguenti due proprietà rispettivamente di non degenerazione e di *scaling*: fissato $x_0 \in \Omega$ vale

$$(3) \quad F(x_0, 0, v, I - \gamma v \otimes v) > 0 \quad \forall \gamma > \gamma_0,$$

per tutti i vettori non nulli v opportunamente piccoli, ed esiste $\varphi: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ tale che

$$(4) \quad F(x, \xi s, \xi v, \xi(I - \gamma v \otimes v)) \geq \varphi(\xi) F(x, s, v, I - \gamma v \otimes v) \quad \forall \gamma > \gamma_0,$$

per ogni x in un intorno di x_0 e $\xi > 0$, $s < 0$ in opportuni intervalli. Denotiamo con $\nu \otimes \nu$ la matrice simmetrica definita da $(\nu \otimes \nu)_{ij} = \nu_i \nu_j$. Si osservi che le condizioni (3), (4) rimpiazzano in un certo senso l'uniforme ellitticità e l'1-omogeneità degli operatori lineari. Si sono testate tali proprietà su vari esempi di operatori come il p -Laplaciano e quello delle superfici minime; inoltre si è esteso il PMaxF al caso di operatori singolari in $p = 0$ e molto degeneri come l' ∞ -Laplaciano ed alcune equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman del 1° ordine. Nel capitolo 2 della tesi si sono estesi agli operatori parabolici degeneri i metodi usati per gli operatori ellittici. La dimostrazione del PMaxF è autosufficiente e si basa su una combinazione delle classiche argomentazioni di Hopf e la stessa definizione di sottosoluzione di viscosità.

Un altro risultato della tesi è la caratterizzazione dell'insieme dove si propagano i massimi interni delle sottosoluzioni di particolari equazioni. È noto che nel caso di operatori lineari ellittici degeneri l'insieme dove una sottosoluzione classica u coincide con il $\sup u$ non è necessariamente tutto Ω , ma può essere descritto tramite le traiettorie di opportuni campi vettoriali che appaiono nell'operatore. Si è voluto estendere questo tipo di risultati, ottenuti nel caso lineare da Bony [2], Stroock, Varadhan [5] e altri autori, al caso di operatori di Hamilton-Jacobi degeneri del 2° ordine in cui F si può rappresentare come l'estremo superiore o inferiore di operatori lineari:

$$(5) \quad F(x, r, p, X) = \sup_{\alpha \in A} \{ -\text{Trace}(a^\alpha(x) X) + b^\alpha(x) \cdot p + c^\alpha(x) r \},$$

$$(6) \quad F(x, r, p, X) = \inf_{\alpha \in A} \{ -\text{Trace}(a^\alpha(x) X) + b^\alpha(x) \cdot p + c^\alpha(x) r \},$$

Tali operatori hanno origine da problemi di controllo ottimo per processi di diffusione degeneri. La propagazione dei massimi è differente nei due casi. Per semplicità si suppone che, per ogni $\alpha \in A$, $a^\alpha = \frac{1}{2}(\sigma^\alpha)(\sigma^\alpha)^T$ per qualche matrice σ^α di ordine $N \times M$. Denotiamo con X_h^α l' h -esima colonna di σ^α e con X_0^α il campo vettoriale $X_0 := \sum_{i=1}^N \left(b_i + \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Nel caso di operatori convessi della forma (5) si dimostra che per ogni sottosoluzione di viscosità u di (1)-(5) e $x \in \Omega$ tale che $0 \leq C := \sup_{\Omega} u < \infty$ e $u(x) = C$, l'insieme $Prop(x)$ dove $u = C$ contiene

(j) l'insieme dei punti raggiungibili da x attraverso le traiettorie del sistema controllato

$$(7) \quad y'(t) = \sum_{h=1}^M X_h^{\alpha_h(t)}(y(t)) \gamma_h(t) - X_0^{\alpha_0(t)}(y(t)) w(t),$$

dove α_h , γ_h , and w sono funzioni misurabili a valori rispettivamente in A , $[-1, 1]$, e $[0, 1]$;

(*jj*) l'insieme dei punti che sono raggiungibili da x in qualche istante di tempo $t > 0$, con probabilità positiva, tramite le traiettorie del sistema differenziale stocastico controllato

$$(8) \quad dX_t = \sigma^{a_t}(X_t) dB_t - b^{a_t}(X_t) dt ,$$

dove α^t è un controllo ammissibile a valori in A e B_t è un moto Browniano M dimensionale. Come conseguenza di (*j*) e (*jj*) si riesce ad estendere il PMaxF di Bony, per operatori lineari ipoellittici, ad operatori nonlineari e soddisfacenti la seguente versione non lineare della condizione di Hörmander: *se per ogni $z \in \Omega$ and $h = 1, \dots, M$ esiste $\alpha_h \in A$ tale che il rango dell'algebra di Lie generata dai campi $X_h^{\alpha_h}$ è uguale a N in z , allora $Prop(x) = \Omega$ per ogni $x \in \Omega$* . La dimostrazione di (*jj*) è indipendente da quella di Stroock e Varadhan [5] in cui si usano tecniche probabilistiche. Per la dimostrazione sia di (*j*) che di (*jj*) si è invece seguita l'idea originaria di Bony, che consiste nell'utilizzare un'opportuna caratterizzazione degli insiemi chiusi di $\mathfrak{N}^N$ invarianti rispetto a sistemi differenziali controllati.

Nel caso di operatori concavi della forma (6) il meccanismo di propagazione è differente. Si considera un gioco differenziale a due giocatori con il seguente sistema dinamico controllato

$$(9) \quad y'(t) = \sum_{h=1}^M X_h^{\alpha(t)}(y(t)) w_h(t)$$

dove il giocatore $w = (w_h) \in [-1, 1]^M$ sceglie controlli misurabili e α sceglie strategie rilassate non anticipanti in A , (per la definizione di gioco differenziale e di strategia rilassata non anticipante, si veda ad esempio [1]). In questo caso si è provato che per ogni sottosoluzione di viscosità $u \in SCS(\Omega)$ di (1)-(6) che assume un massimo non negativo in qualche punto $x_0 \in \Omega$, l'insieme di propagazione $Prop(x_0)$ contiene tutti i punti z che il giocatore w può raggiungere da x_0 , per ogni strategia scelta da α , tramite le traiettorie di (9).

Nella seconda parte della tesi si dimostra un teorema di unicità per l'equazione di Isaacs corrispondente a giochi differenziali che derivano da problemi di controllo cosiddetto Robusto o H_∞ . Più precisamente si considera un sistema non lineare controllato e soggetto ad un disturbo del tipo

$$(10) \quad \begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)) + \sigma(y(t)) \omega(t), \\ y(s) = x, \end{cases}$$

dove $u(\cdot)$ è un controllo misurabile a valori in uno sottoinsieme compatto U di $\mathfrak{N}^l$ e $\omega(\cdot) \in L^2([s, T], \mathfrak{N}^M)$ è il disturbo.

Si considera il seguente funzionale costo

$$(11) \quad J(s, x, u, \omega) := \int_s^T l(y(t), u(t)) - \frac{\gamma^2}{2} |\omega(t)|^2 dt + \psi(y(T)).$$

Il valore inferiore del gioco è definito da

$$(12) \quad V(s, x) := \inf_{\theta \in \Theta(s)} \sup_{\omega \in L^2([s, T], \mathfrak{R}^M)} J(s, x, \theta[\omega], \omega),$$

dove $\Theta(s)$ denota l'insieme delle strategie non anticipanti per il giocatutore u . Le ipotesi fatte sui dati includono il problema Lineare Quadratico. Si prova che V è l'unica soluzione di viscosità nell'insieme delle funzioni non negative, localmente Lipschitziane, e soddisfacenti una condizione di crescita al più quadratica in x , del seguente problema

$$(13) \quad \begin{cases} W_t(t, x) + H(x, D_x W(t, x)) = 0, & \text{in } (s, T) \times \mathfrak{R}^N, \\ W(T, x) = \psi(x) & \text{in } \mathfrak{R}^N, \end{cases}$$

dove la Hamiltoniana H è definita da

$$(14) \quad H(x, p) := \max_{\omega \in \mathfrak{R}^M} \left\{ -\frac{\gamma^2}{2} |\omega|^2 + \sigma(x) \omega \cdot p \right\} + \min_{u \in U} \{f(x, u) \cdot p + l(x, u)\}.$$

Il risultato ottenuto migliora quello in [4] nel senso che il coefficiente di diffusione σ non è supposto costante e non si fa un'ipotesi di crescita sulla costante di Lipschitz delle soluzioni.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARDI M., CAPUZZO DOLCETTA I., *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser Boston (1997).
- [2] BONY J. M., *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **19** (1969), 277-304.
- [3] CRANDALL M. G., ISHII H. e LIONS P. L., *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., **27** (1992), 1-67.
- [4] MCENEANEY W.M., *Uniqueness for viscosity solutions of nonstationary HJB equations under some a priori conditions (with applications)*, SIAM J. Control and Optim., **33** (1995), 1560-1576.
- [5] STROOCK D. W., VARADHAN S. R. S., *On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle*, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971) **III: Probability theory** 333-359. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1972.

Dipartimento di Matematica, Università di Padova; e-mail: dalio@math.unipd.it
 Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo X
 Direttore di ricerca: Prof. Martino Bardi, Università di Padova