Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Claudia Capone

Coppie div-rot a distorsione finita

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 37–40.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_37_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 37-40

Coppie div-rot a distorsione finita.

CLAUDIA CAPONE

Si studiano alcune quantità note nella teoria della Compattezza per Compensazione, con particolare riferimento a Jacobiani e coppie «div-rot», cioè coppie di campi vettoriali (B, E) con $div\, B = 0$, $rot\, E = 0$ nel senso delle distribuzioni.

In tale ambito ci si riferisce particolarmente alla sottoclasse, costituita dalle coppie «div-rot» verificanti una disuguaglianza di distorsione. Ad ogni soluzione di un'equazione ellittica si può associare una coppia «div-rot» (B, E), del tipo in questione.

Infatti, ad esempio, se $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ risolve l'equazione lineare

$$div\, A(x)\, \nabla u = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

ove $A(x)$ è una matrice simmetrica, verificante

$$\frac{|\xi|^2}{K(x)} \leq \langle A(x)\, \xi, \xi \rangle \leq K(x)\, |\xi|^2 \tag{2}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, con $K : \Omega \rightarrow [1, \infty)$ misurabile, posto

$$E = \nabla u\,, \qquad B = A(x)\, \nabla u \tag{3}$$

si vede facilmente che sussiste la disuguaglianza

$$|B(x)|^2 + |E(x)|^2 \leq \left(K(x) + \frac{1}{K(x)} \right) \langle B(x), E(x) \rangle \tag{4}$$

ove $\langle B, E \rangle = \sum_{i=1}^{n} B_i E_i$.

Un punto importante della teoria è che viceversa, data una coppia «div-rot» (B, E) soddisfacente la (4), esiste una matrice simmetrica $\mathcal{A}(x)$ verificante limitazioni del tipo (2), tali che sussistano le (3).

Lo stretto legame tra le rappresentazioni quasiconformi nel piano e le equazioni lineari uniformemente ellittiche si traduce così, in dimensione $n \geq 2$, in uno stretto legame tra coppie «div-rot» a distorsione finita, cioè verificanti (4) ed equazioni ellittiche degeneri, cioè verificanti (2).

Esempi significativi di coppie «div-rot» si ottengono a partire da equazioni non lineari di Leray-Lions

$$div\, A(x, \nabla u) = 0$$

quando $A = A(x, \xi)$ verifica stime del tipo

$$|\xi|^2 + |A(x, \xi)|^2 \leqslant \left(K(x) + \frac{1}{K(x)}\right)\langle A(x, \xi), \xi\rangle .$$

Invero, basta porre

$$E = \nabla u \,, \qquad B = A(x, \nabla u) .$$

In particolare allora si ha che, se $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ risolve l'equazione

$$div\, A(x, \nabla u) = 0$$

allora u risolve anche un'equazione lineare

$$div\; \mathcal{A}(x)\, \nabla u = 0$$

in cui $\mathcal{A}(x)$ ha le stesse costanti di ellitticità e di crescita di quelle di $A(x, \xi)$.

L'ipotesi naturale per B, E è $K \in L^\infty$ e $(B, E) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Tuttavia in un lavoro dovuto a Iwaniec-Sbordone, intervengono spazi di Orlicz del tipo

$$L^2 \log^{-1} L(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \qquad L^2 \log L(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

allorché non si suppone $K \in L^\infty$, ma solo $K \in EXP$.

Proprio in conseguenza del ricorrere di questi spazi, ci si dedica a proprietà degli spazi $L^2 \log^\alpha L$ e EXP_β soffermandoci anche su recenti risultati che stabiliscono formule per la distanza da L^∞ in EXP_β o anche di altri spazi funzionali notevoli in cui L^∞ non è denso ([2]), e ad un risultato di caratterizzazione degli operatori ellittici a coefficienti in EXP_β recentemente ottenuta in ([3]).

Più precisamente, si consideri la forma bilineare su $C_o^\infty(\Omega) \times C_o^\infty(\Omega)$

$$a(u, v) = \sum_{ij} \left\langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle \tag{5}$$

laddove $B_{ij} = B_{ji}$ for $i, j = 1, \ldots, n$, sono distribuzioni e Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$.

Spagnolo prova che $a(u, v)$ si può estendere ad una forma bilineare continua su $H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega)$, ovvero, esiste una costante $M > 0$ tale che

$$|a(u, v)| \leqslant M \|u\|_{H_o^1(\Omega)} \|v\|_{H_o^1(\Omega)}$$

per $u, v \in H_o^1(\Omega)$ se e solo se $B_{ij} \in L^\infty$.

In tale modo egli fornisce una caratterizzazione astratta di operatori differenziali lineari in forma di divergenza

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) : H_o^1 \to H^{-1}$$

con coefficienti reali, limitati e misurabili.

In [3], si dà un risultato analogo, però nel caso in cui i coefficienti a_{ij} appartengano allo spazio EXP_β delle funzioni esponenzialmente integrabili.

Più precisamente si prova che la forma bilineare (5) si può estendere ad una forma bilineare continua su $H_o^{1,\,L^2\log^\alpha L}(\Omega)\times H_o^{1,\,L^2\log^\alpha L}(\Omega)$, essendo questi lo spazio di Orlicz-Sobolev delle funzioni $u\in W_o^{1,\,1}(\Omega)$ tali che $|\nabla u|$ appartiene allo spazio di Zygmund $L^2\log^\alpha L(\Omega)$, $(0<\alpha\leqslant 1)$, se e solo se $B_{ij}\in EXP_{1/\alpha}$.

Tale studio essendo stato motivato da alcuni recenti risultati di regolarità per le soluzioni di problemi di Dirichlet per operatori ellittici lineari in forma di divergenza, con coefficienti EXP_β, forniti da Franchi-Serapioni-Serra Cassano e Migliaccio-Moscariello.

È noto che, i prodotti di campi «div-rot», appartengono allo spazio di Hardy $\mathcal{H}^1(\Omega)$ ([5]). Tenendo presente la dualità tra $BMO(\Omega)$ ed $\mathcal{H}^1(\Omega)$, si ha

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} b\langle B, E\rangle\right| \leqslant c_p(n)\|b\|_{BMO}\|B\|_q\|E\|_p$$

Se supponiamo che siano $b\in BMO(\Omega)$, $B\in L^q(\Omega,\mathbb{R}^n)$, $div\,B=0$, $E=\nabla u\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^n)$, con u appartenente allo spazio di Sobolev $W_o^{1,\,p}(\Omega)$, si ha

$$\left|\int_{\Omega} b\langle B, E\rangle\right| \leqslant c_p(n)\|b\|_{BMO(\Omega)}\|B\|_{L^q(\Omega,\,\mathbb{R}^n)}\|E\|_{L^p(\Omega,\,\mathbb{R}^n)}.$$

Almeno nel caso $p=q=2$ e $\Omega=\mathbb{R}^n$, in [5] gli autori provano un risultato inverso, più precisamente

$$\sup_{B,\,E}\frac{\left|\int_{\mathbb{R}^n} b\langle B, E\rangle\right|}{\|B\|_{L^2}\|E\|_{L^2}} \geqslant c(n)\ \|b\|_{BMO} \tag{6}$$

laddove l'estremo superiore è preso al variare di $B, E\in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, con $div\,B=0$ e $rot\,E=0$.

Analogamente, il determinante Jacobiano di una mappa $f=(f^1,\dots,f^n):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ di classe $W_0^{1,\,n}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ appartiene allo spazio di Hardy $\mathcal{H}^1(\Omega)$ ([5]). Questo, in virtù del legame di dualità, esistente tra $\mathcal{H}^1(\Omega)$ e $BMO(\Omega)$, permette di dare significato al seguente integrale

$$\int_\Omega b(x)\,J(x,f)\,dx$$

per $b(x)$ in the BMO. D'altra parte gli autori di [5] hanno congetturato che lo spazio di Hardy $\mathcal{H}^1(\Omega)$ fosse costituito di Jacobiani. Sebbene al momento tale congettura non sia stata ancora provata, tuttavia esistono alcune considerazioni e risultati parziali che consentono di avvalorare tale congettura. Uno di questi, dovuto agli stessi autori Coifman-Lions-Meyer-Semmes, stabilisce che ogni funzione di $\mathcal{H}^1(\Omega)$ può scriversi come somma di una serie di Jacobiani, convergente in $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Alla luce di tali considerazioni, in analogia alla (6), in [4] si fornisce una caratterizzazione delle funzioni *BMO* in termini di Jacobiani.

Supponiamo che Ω rappresenti un cubo di $\mathbb{R}^n$ oppure l'intero spazio, $(n \geq 2)$. Vale il seguente

TEOREMA 1. – *Sia* $b \in BMO(\Omega)$ *allora*

$$\sup_{f^i \in W_o^{1,p_i}(2\Omega)} \frac{\left| \int_{\mathbb{R}^n} b(x)\, J(x, f)\, dx \right|}{\|\nabla f^1\|_{p_1} \cdots \|\nabla f^n\|_{p_n}} \geq c\ \|b\|_{BMO(\Omega)} \tag{4.3}$$

con $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_n} = 1$ *e* $c = c(n, p_1, \ldots, p_n)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CAPONE C. and FIORENZA A., *Maximal inequalities in weighted Orlicz spaces*, Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, **62** (1995), 213-224.

[2] CAPONE C. e FORMICA M. R., *The distance to L^∞ from the Morrey space $L^{p,\lambda}$*, Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, **62** (1995), 291-300.

[3] CAPONE C. and FORMICA M. R., *An abstract characterization of divergence form operators with unbounded coefficients*, Atti del Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (1997), in corso di stampa.

[4] CAPONE C. and FORMICA M. R., *A pairing between BMO functions and Jacobians*, Ricerche di Matematica (1998), in corso di stampa.

[5] COIFMAN R., LIONS P. L., MEYERS Y. and SEMMES S., *Compensated compactness and Hardy spaces*, J. Math. Pures Appl., **72** (1993), 247-286.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli», Università di Napoli
via Cintia - 80126 Napoli; e-mail: capone1@matna2.dma.unina.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli) - Ciclo X
Direttore di Ricerca: Prof. Carlo Sbordone, Università di Napoli