BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

SILVIA BENVENUTI

Algebre di Hopf e invarianti di 3-varietà con combing e framing

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 25–28.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_25_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 25-28

Algebre di Hopf e invarianti di 3-varietà con combing e framing.

SILVIA BENVENUTI

Un *combing* su una 3-varietà connessa, chiusa e orientabile M è un campo di vettori tangenti mai nullo, considerato a meno di omotopia, e un *framing* su M è una terna di campi di vettori indipendenti, la cui orientazione coincide punto per punto con quella della varietà, visti ancora a meno di omotopia. G. Kuperberg, in [3], mostra l'esistenza di un invariante per coppie (M, s) (dove M è una 3-varietà connessa, chiusa e orientabile, e s è un combing o framing su M), che dipende da un'algebra di Hopf di dimensione finita H (bilanciata nel caso s sia un combing), a valori nel campo base di H. L'interesse per gli invarianti di Kuperberg deriva principalmente dal fatto che, a differenza di quanto succede per tutti gli altri invarianti di 3-varietà derivanti da algebre di Hopf, questi invarianti si possono definire a partire da una arbitraria algebra di Hopf di dimensione finita, ovvero non è necessario disporre di algebre di Hopf quasitriangolari, ribbon, modulari, semisemplici, involutorie, ecc... Tuttavia la definizione di Kuperberg non fornisce una «ricetta» di calcolo: nella tesi si produce invece un algoritmo per calcolare gli invarianti di Kuperberg partendo da un input puramente combinatorico, la cui definizione si basa sulla teoria delle spine standard ramificate. Più precisamente, le classi delle 3-varietà con combing e con framing hanno una realizzazione combinatorica per mezzo della teoria delle spine standard ramificate, sviluppata da R. Benedetti e C. Petronio (si veda [1]): nella tesi le idee introdotte da Kuperberg nell'ambito della teoria degli spezzamenti di Heegaard vengono tradotte in quello della teoria delle spine, e il «dizionario» così ottenuto viene utilizzato per ridefinire gli invarianti di Kuperberg in un modo puramente algoritmico.

Nel seguito descriveremo brevemente l'input e l'output del nostro algoritmo nel caso s sia un combing e nel caso s sia un framing, e daremo qualche cenno sull'algoritmo stesso; per concludere, evidenzieremo alcune delle direzioni di ricerca suggerite dal lavoro svolto nella tesi.

L'<u>INPUT</u> dell'algoritmo nel caso combed è un *o-grafo normale chiuso*, che è un grafo finito connesso Γ con vertici quadrivalenti opportunamente decorato e soddisfacente un certo numero di proprietà (si veda [1]). Gli o-grafi normali chiusi «codificano» le 3-varietà con combing, in virtù del seguente risultato:

TEOREMA 1 ([1]). – *Esiste una mappa di ricostruzione effettiva surgettiva*

$$\Phi : \left\{\begin{matrix} \textit{o-grafi} \\ \textit{normali} \\ \textit{chiusi} \end{matrix}\right\} \to \left\{ (M, v) \,\middle|\, \begin{matrix} M \textit{ 3-varietà chiusa}, \\ \textit{connessa, orientata} \\ v \textit{ combing su } M \end{matrix} \right\} \Big/ \left\{\begin{matrix} \textit{diffeomorfismi} \\ \textit{che conservano} \\ \textit{l'orientazione} \end{matrix}\right\}$$

e $\Phi(\Gamma_1) = \Phi(\Gamma_2)$ *se e solo se* Γ_1 *si può ottenere da* Γ_2 *con un numero finito di mosse scelte in un dato insieme finito di mosse locali.*

ESEMPIO *Un o-grafo normale chiuso che rappresenta un combing su* $S^1 \times S^2$:

Un risultato analogo vale per la classe delle 3-varietà con framing, che verranno codificate da particolari o-grafi normali chiusi, ulteriormente decorati (*o-grafi normali framed*).

L'OUTPUT dell'algoritmo è in entrambi i casi un *T-grafo*, un oggetto che consiste in un SUPPORTO e una DECORAZIONE:

il SUPPORTO è il dato di (E, I, τ), dove

E è una famiglia ordinata di g scatole, ognuna con un angolo marcato, e con l_i trattini sul bordo, ordinati in verso antiorario, $l_i \geq 1$;

I è analogamente una famiglia ordinata di g scatole, ognuna con un angolo marcato, e con r_i trattini sul bordo, ordinati in verso antiorario, $r_i \geq 1$, $\sum r_i = \sum l_i = t$;

τ è l'unione di t stringhe, ognuna delle quali connette un trattino della famiglia E con uno della famiglia I.

La DECORAZIONE è un insieme di numeri,

$$(\delta_1, \ldots, \delta_g, \varrho_1, \ldots, \varrho_g, \alpha_1, \ldots, \alpha_t, \beta_1, \ldots, \beta_t)$$

dove δ_i (risp. ϱ_j) è un semi-intero, associato alla scatola $m_i \in I$ (risp. $p_j \in E$), e α_k e β_k sono interi, associati alla k-ma stringa di τ.

ESEMPIO *Un T-grafo*:

Come dicevamo all'inizio, vogliamo associare all'input un elemento del campo base di un'algebra di Hopf; è importante osservare che in realtà il T-grafo associato ad un o-grafo normale Γ, visto a meno di una opportuna relazione di equivalenza, è l'*invariante di Kuperberg universale* della coppia (M_Γ, s_Γ), e l'algebra di Hopf viene usata per «tradurlo» in uno scalare per mezzo di semplici istruzioni, senza alcuna difficoltà concettuale. L'algoritmo è in entrambi i casi diviso in due parti:

Parte 1 $\boxed{\text{Dall'o-grafo } \Gamma \text{ al supporto del T-grafo}}$

qui essenzialmente si costruisce il ponte tra la teoria delle spine e quella dei diagrammi di Heegaard: gli invarianti di Kuperberg sono infatti definiti in termini di tali diagrammi, quindi in primo luogo è necessario mostrare come associare ad ogni o-grafo Γ con $g-1$ vertici un diagramma di Heegaard di genere g per M_Γ, e descrivere come scegliere un punto base su ogni curva del diagramma stesso.

Parte 2 $\boxed{\text{Dall'o-grafo } \Gamma \text{ alla decorazione del T-grafo}}$

qui si vede come usare la struttura di M_Γ, ovvero si vede come usare il combing o il framing portato dall'o-grafo al fine di calcolare la decorazione del T-grafo il cui supporto è stato ottenuto nella parte 1.

Il lavoro svolto nella tesi suggerisce diverse direzioni di ricerca:

implementare l'algoritmo: nella tesi mostriamo come fare i conti nei casi in cui ciò si può fare a mano, ma sarebbe certamente interessante scrivere il programma per il calcolo nel caso generale;

ricavare informazioni sulle algebre di Hopf: sappiamo dal teorema 1 che se l'o-grafo Γ si ottiene a partire dall'o-grafo Γ' tramite una delle mosse del calcolo, allora le varietà combed portate dai due o-grafi sono equivalenti, e quindi il valore dell' invariante di Kuperberg calcolato per Γ deve essere equivalente a quello calcolato per Γ'. In linea di principio questo porta quindi all'individuazione di relazioni universalmente valide in ogni algebra di Hopf, e uno dei nostri scopi è scrivere tali relazioni nel modo più espressivo possibile;

dimostrare l'invarianza nell'ambito della teoria delle spine: nella tesi si calcolano delle quantità che si dimostra essere uguali a quelle definite da Kuperberg, e ci si appoggia poi al lavoro di Kuperberg per quanto riguarda l'invarianza: potremmo invece cercare di dimostrare l'invarianza di tali quantità all'interno della teoria delle spine standard ramificate, dimostrando cioè che valori ottenuti a partire da o-grafi collegati da un numero finito di mosse sono equivalenti in ogni algebra di Hopf;

confrontare con altri invarianti: al fine di capire qualcosa di più sul significato topologico degli invarianti di Kuperberg, si può pensare di confrontarli con altri invarianti noti di 3-varietà: la teoria delle spine standard ramificate si è mostrata estremamente efficace nel trattare e generalizzare la versione di Turaev delle torsioni di Reidemeister per strutture di Eulero ([4]). Ci sono diverse analogie formali tra le costruzioni usate in tale contesto ([2]) e quelle descritte nella tesi per gli invarianti di Kuperberg, e ciò suggerisce di analizzare le relazioni tra i due tipi di invarianti, sfruttando il dizionario comune in termini di spine.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BENEDETTI e C. PETRONIO, *Branched Standard Spines of* 3*-manifolds*, Lecture Notes in Math. n. 1653, Springer, Berlin (1997).

[2] R. BENEDETTI e C. PETRONIO, *Torsion invariants of combed 3-manifolds with boundary pattern and Legendrian links*, preprint del Dip. di Matematica dell'Università di Pisa (1998).

[3] G. KUPERBERG, *Noninvolutory Hopf algebras and 3-manifolds invariants*, Duke Math. Journal, 84 (1996), 83-129.

[4] V. G. TURAEV, *Torsion invariants of Spin^c-structures on 3-manifolds*, Math. Res. Lett., 4 (1997), 697-695.

Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, C. N. R. S. - U. M. R. 5584
U. F. R. Sciences et Tecniques, avenue Alain Savary, B.P. 47870
21078 - Dijon Cedex, France
e-mail: benvenut@topolog.u-bourgogne.fr, benvenut@dm.unipi.it
Dottorato in Matematica (Sede amministrativa: Pisa) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. R. Benedetti, Università di Pisa