Bollettino
Unione Matematica Italiana
*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

Alessandro Veneruso

# Moltiplicatori sul gruppo di Heisenberg

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 229–232.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_229_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 229-232

# Moltiplicatori sul gruppo di Heisenberg.

Alessandro Veneruso

Nella tesi abbiamo studiato la limitatezza sugli spazi di Lebesgue e sugli spazi di Hardy degli operatori associati a due classi di moltiplicatori spettrali sul gruppo di Heisenberg.

Per operatori della forma $m(\mathcal{L})$, dove $\mathcal{L}$ è il sublaplaciano su un gruppo stratificato $G$ di dimensione omogenea $Q$ e $m$ è una funzione boreliana limitata su $\mathbf{R}_+$, il problema di determinare condizioni sufficienti su $m$ affinché l'operatore $m(\mathcal{L})$ sia limitato sugli spazi di Lebesgue $L^p(G)$, $1 < p < +\infty$, o più in generale sugli spazi di Hardy $H^p(G)$, $0 < p < +\infty$, ha una lunga storia. Il miglior risultato noto valido in qualsiasi gruppo stratificato $G$ è dovuto a G. Mauceri e S. Meda [3]: se $\varphi$ è una funzione in $C_c^\infty(\mathbf{R})$ con supporto nell'intervallo $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ tale che $\sum_{j \in \mathbf{Z}} \varphi(2^j \lambda) = 1$ per ogni $\lambda > 0$, allora si ha il seguente

Teorema 1. – *Siano* $0 < p_0 \leq 1$ *e*

$$\alpha > Q\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

*Sia* $m$ *una funzione boreliana limitata su* $\mathbf{R}$ *tale che*

$$\sup_{j \in \mathbf{Z}} \|\varphi(\cdot)\, m(2^j \cdot)\|_{L^2_\alpha(\mathbf{R})} < +\infty .$$

*Allora l'operatore* $m(\mathcal{L})$ *è limitato su* $H^p(G)$ *per* $p_0 \leq p < +\infty$.

*Il punto cruciale della dimostrazione del Teorema 1 è la disuguaglianza*

$$\int_G |x|^{2\delta} |M(x)|^2 \, dx \leq C_{\delta,\alpha} \|m\|^2_{L^2_\alpha(\mathbf{R})} \tag{2}$$

valida per $\alpha > \delta \geq 0$, assumendo che $m$ abbia supporto in $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e $M$ sia il nucleo dell'operatore $m(\mathcal{L})$, ossia l'unica distribuzione temperata tale che $m(\mathcal{L})\, f = f * M$ per ogni $f \in \mathcal{S}(G)$. Si intende che $L^2_\alpha(\mathbf{R})$ è lo spazio di Sobolev di ordine $\alpha$ su $\mathbf{R}$ e $\mathcal{S}(G)$ è lo spazio delle funzioni di Schwartz su $G$. Il Teorema 1 si ottiene da (2) mediante tecniche classiche (v. [2]). Più recentemente, D. Müller e E. M. Stein [5] hanno dimostrato che, se $G$ è il gruppo di Heisenberg $\mathbf{H}_n$, allora la disuguaglianza (2) vale per $\alpha > \delta - \frac{1}{2}$ se $\delta \geq 2$. Quindi in questo contesto è possibile enunciare il

Teorema 1 sostituendo la condizione (1) con la condizione più debole

$$\alpha > Q\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}.$$

In seguito, Müller, F. Ricci e Stein [4] hanno dimostrato la limitatezza su $L^p(\mathbf{H}_n)$, $1 < p < +\infty$, di certe classi di operatori $m(\mathcal{L}, -iT)$ dove $T$ è il generatore del centro dell'algebra di Lie di $\mathbf{H}_n$ e $m$ è una funzione su $\mathbf{R}^2$ che soddisfa condizioni invarianti rispetto a una famiglia di dilatazioni a più parametri, in analogia con il classico teorema di Marcinkiewicz sullo spazio euclideo.

Nella prima parte della tesi abbiamo esteso i risultati di Müller, Ricci e Stein a operatori più generali del tipo $m(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n, -iT)$, dove $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$ sono i sublaplaciani parziali su $\mathbf{H}_n$. Per enunciare il risultato occorre premettere alcune notazioni. Fissiamo una funzione $\eta \in C_c^\infty\left(\left(\frac{1}{4}, 4\right)\right)$ tale che $\eta \geqslant 0$ e $\eta = 1$ in $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Per ogni $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ poniamo

$$\psi(\mu) = \prod_{j=1}^{n} \eta(\mu_j) \cdot \eta(|\mu_{n+1}|).$$

Sia inoltre $m$ una funzione boreliana limitata su $\mathbf{R}^{n+1}$. Per ogni $r = (r_1, \ldots, r_{n+1}) \in (\mathbf{R}_+)^{n+1}$ poniamo

$$m^{(r)}(\mu) = m(r_1\mu_1, \ldots, r_{n+1}\mu_{n+1}).$$

Inoltre, per $\alpha \geqslant 0$ e $\beta \geqslant 0$ poniamo

$$\|m\|_{L^2_{\alpha,\beta,\,\mathrm{sloc}}} = \sup_{r \in (\mathbf{R}_+)^{n+1}} \|m^{(r)}\psi\|_{L^2_{\alpha,\beta}}$$

dove la norma di Sobolev mista $\|\cdot\|_{L^2_{\alpha,\beta}}$ è definita da

$$\|g\|^2_{L^2_{\alpha,\beta}} = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} \left| \widehat{g}(\xi) \cdot \prod_{j=1}^{n} (1 + |\xi_j|)^\alpha \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{n+1} |\xi_j|\right)^\beta \right|^2 d\xi.$$

TEOREMA 2. – *Sia $m$ una funzione boreliana limitata su $\mathbf{R}^{n+1}$ tale che*

$$\|m\|_{L^2_{\alpha,\beta,\,\mathrm{sloc}}} < +\infty$$

*per qualche $\alpha > 1$ e $\beta > \frac{1}{2}$. Allora l'operatore $m(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n, -iT)$ è limitato su $L^p(\mathbf{H}_n)$ per $1 < p < +\infty$.*

Sempre nella prima parte della tesi abbiamo anche dimostrato il seguente

TEOREMA 3. – *Se $m$ è una funzione di Schwartz su $\mathbf{R}^{n+1}$, allora il nucleo dell'operatore $m(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n, -iT)$ è una funzione di Schwartz su $\mathbf{H}_n$.*

Tale risultato, ottenuto anche per i nuclei degli operatori $m(\mathcal{L}, -iT)$ e $m(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)$ se $m$ è una funzione di Schwartz rispettivamente su $\mathbf{R}^2$ e su $\mathbf{R}^n$, estende l'analogo risultato di C. Benson, J. Jenkins e G. Ratcliff [1] dove si suppone che la funzione $m$ sia di classe $C^\infty$ a supporto compatto.

Un problema naturale sarebbe quello di estendere la teoria dei moltiplicatori di Marcinkiewicz a degli spazi di Hardy multiparametro su $\mathbf{H}_n$. Tuttavia, per il momento, una teoria degli spazi di Hardy multiparametro sul gruppo di Heisenberg sembra difficile da sviluppare. Pertanto nella seconda parte della tesi abbiamo generalizzato il Teorema 1, dimostrando la limitatezza sugli spazi di Hardy classici $H^p(\mathbf{H}_n)$ degli operatori $m(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n, -iT)$ quando $m$ verifica condizioni di tipo Hörmander, cioè condizioni invarianti rispetto a dilatazioni a un parametro. Anche in questo caso, per enunciare il risultato occorre premettere alcune notazioni. Innanzitutto, per ogni $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ poniamo

$$w(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leqslant j \leqslant n \\ 2 & \text{se } j = n+1 \,. \end{cases}$$

Definiamo lo spazio $\mathcal{L}^2_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}|\beta}$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \beta \geqslant 0)$ delle funzioni $f \in L^2(\mathbf{R}^{n+1})$ la cui norma al quadrato

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}^2_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}|\beta}} = (2\pi)^{-(n+1)} \int_{\mathbf{R}^{n+1}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \cdot \prod_{j=1}^{n+1} (1 + |\xi_j|)^{2\alpha_j} \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{n+1} |\xi_j|^{1/w(j)}\right)^{2\beta} d\xi$$

è finita. Poniamo inoltre

$$\|m\|_{\mathcal{L}^2_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}|\beta, \mathrm{sloc}}} = \sup_{j \in \mathbf{Z}} \|\varphi(\cdot)\, m(2^j \cdot)\|_{\mathcal{L}^2_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}|\beta}}$$

dove $\varphi$ è una funzione in $C_c^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ con supporto in $\left\{\xi \in \mathbf{R}^{n+1} \colon \frac{1}{2} < |\xi| < 2\right\}$ tale che $\sum_{j \in \mathbf{Z}} \varphi(2^j \xi) = 1$ per ogni $\xi \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

TEOREMA 4. – *Siano* $0 < p_0 \leqslant 1$ *e* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}, \beta \geqslant 0$ *tali che*

$$\beta + \sum_{j \in S} w(j)\left(\alpha_j - \frac{1}{2}\right) > Q\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}\right) - 1$$

*per ogni* $S \subset \{1, \ldots, n+1\}$, $S \neq \emptyset$. *Sia* $m$ *una funzione boreliana limitata su* $\mathbf{R}^{n+1}$ *tale che*

$$\|m\|_{\mathcal{L}^2_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}|\beta, \mathrm{sloc}}} < +\infty \,.$$

*Allora l'operatore* $m(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n, -iT)$ *è limitato su* $H^p(\mathbf{H}_n)$ *per* $p_0 \leqslant p < +\infty$.

Il Teorema 4 viene dimostrato mediante stime di norme in $L^2(\mathbf{H}_n)$ con peso di nuclei di operatori corrispondenti a moltiplicatori a supporto compatto, in maniera analoga alla dimostrazione del Teorema 1 mediante la stima (2). Le tecniche usate per stabilire tali stime combinano e generalizzano quelle introdotte da De Michele e Mauceri [2], Mauceri e Meda [3] e Müller e Stein [5] per operatori del tipo $m(\mathcal{L})$.

Infine, abbiamo ottenuto risultati analoghi al Teorema 4 per operatori del tipo $m(\mathcal{L}, -iT)$ e $m(\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n)$, dove la funzione $m$ soddisfa analoghe condizioni di Hörmander rispettivamente su $\mathbf{R}^2$ e su $\mathbf{R}^n$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] C. BENSON, J. JENKINS e G. RATCLIFF, *The spherical transform of a Schwartz function on the Heisenberg group*, J. Funct. Anal., **154** (1998), 379-423.

[2] L. DE MICHELE e G. MAUCERI, *$H^p$ multipliers on stratified groups*, Ann. Mat. Pura Appl., **148** (1987), 353-366.

[3] G. MAUCERI e S. MEDA, *Vector-valued multipliers on stratified groups*, Rev. Mat. Iberoamericana, **6** (1990), 141-154.

[4] D. MÜLLER, F. RICCI e E. M. STEIN, *Marcinkiewicz multipliers and multi-parameter structure on Heisenberg(-type) groups, II*, Math. Z., **221** (1996), 267-291.

[5] D. MÜLLER e E. M. STEIN, *On spectral multipliers for Heisenberg and related groups*, J. Math. Pures Appl., **73** (1994), 413-440.

Dipartimento di Matematica, Università di Genova
e-mail: veneruso@dima.unige.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Torino) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Giancarlo Mauceri, Università di Genova