BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ALVISE SOMMARIVA

Analisi costruttiva e numerica per una classe di equazioni di Hammerstein della teoria del trasporto

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 221–224.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_221_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 221-224

Analisi costruttiva e numerica per una classe di equazioni di Hammerstein della teoria del trasporto.

Alvise Sommariva

Il proposito di questo lavoro è di studiare e risolvere numericamente una classe di equazioni di Hammerstein di interesse in teoria del trasporto, tanto nel caso infinito-dimensionale quanto in quello finito-dimensionale, utilizzando un approccio costruttivo basato sulla teoria degli operatori *decrescenti* in spazi ordinati di funzioni [4]. Più precisamente, si ottengono sia *informazioni qualitative*, quali esistenza ed unicità di una soluzione *positiva*, come pure un *trattamento numerico efficiente* grazie al metodo di *Picard* e alcune sue varianti.

Consideriamo la seguente classe di equazioni di Hammerstein (perturbate)

$$u = KN(u) + G(u)\,, \qquad u \in X_+\,, \tag{1}$$

dove X è un opportuno spazio di funzioni, parzialmente ordinato dal cono (normale o regolare) X_+ delle funzioni non negative di X. In (1), K è un operatore lineare positivo e N è l'operatore di Nemytskii $N(u)(x) = f(x, u(x))$, $f(x, u) = 1/\sigma(x, u)$ con σ funzione positiva staccata da zero, tale che $\sigma(x, \cdot)$ è nondecrescente, continua e sublineare (cioè $\sigma(x, \tau u) \geq \tau\sigma(x, u)$ per ogni $\tau \in (0, 1)$, $u \in \mathbb{R}_+$); inoltre $G : X_+ \to X_+$ è l'operatore di Nemytskii definito dalla funzione sublineare e continua $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. In queste ipotesi l'operatore di Hammerstein $KN : X_+ \to X_+$ risulta essere *decrescente*.

Un esempio infinito-dimensionale di (1) è dato dall'equazione integrale

$$u(x) = \int_D k(x, t)\, f(t, u(t))\, dt + g(u(x)), \qquad x \in D, \qquad k(x, \cdot) \in L^1_+(D)\,, \tag{2}$$

dove D è un sottoinsieme misurabile (anche non limitato) di $\mathbb{R}^d$. Equazioni di questo tipo sono di interesse in fisica matematica e in astrofisica: infatti, tramite una semplice trasformazione alcuni modelli integrali della *teoria del trasporto* possono essere riformulati come (2) con $f(x, u) = (1+u)^{-1}$ e $g \equiv 0$. Quali casi notevoli citiamo l'equazione di Chandrasekhar (dove $D = [0, 1]$), che gioca un ruolo chiave nella modellizzazione del trasporto di neutroni come pure del trasferimento radiativo in atmosfere semi-infinite [1], nonché alcune istanze (stazionarie) puramente integrali dell'equazione di Boltzmann, dove $D = \mathbb{R}^3$ o $D = (0, +\infty)$, che compaiono, ad esempio, nello studio degli effetti chimici o biologici delle radiazioni [2].

La formulazione generale (1) include tanto equazioni *infinito-dimensionali* quanto le corrispondenti versioni *finito-dimensionali*: in quest'ultimo caso abbiamo semplicemente $X = \mathbb{R}^m$, $X_+ = \mathbb{R}^m_+$, e $K = \{k_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times m}_+$, cioè (1) viene interpretata come il sistema (non lineare) m-dimensionale

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} k_{ij} f_j(u_j) + g(u_j), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Ad esempio, se si discretizza (2) con una formula di quadratura ad m nodi $\{x_j\}$ e pesi positivi $\{w_j\}$, allora $k_{ij} = w_j k(x_i, x_j)/w(x_j)$, $f_j(u_j) = N_j(u) = f(x_j, u_j)$, dove $w(x)$ è la corrispondente funzione peso [1].

Equazioni integrali non lineari del tipo (1)-(2) sono state studiate in due recenti lavori [3, 4], sotto ipotesi differenti: mentre in [3] D è limitato, $X = C(D)$, KN è compatto e g è un'opportuna contrazione decrescente, in [4] D è non limitato, $X = BC(D)$ (lo spazio delle funzioni continue e limitate in D, dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$), KN non è necessariamente compatto e g è identicamente nulla. In entrambi i lavori, sfruttando la *struttura decrescente*, si dimostra che le iterazioni di Picard

$$u_{n+1} = KN(u_n) + G(u_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

convergono uniformemente all'*unico* punto fisso u^* in X_+, comunque scelta l'approssimazione iniziale $u_0 \in X_+$; inoltre per $u_0 = 0$ la successione (4) esibisce le seguenti monotonie: $u_{2n} \leqslant u_{2n+2} \leqslant u^* \leqslant u_{2n+3} \leqslant u_{2n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Nella tesi si estendono tali risultati seguendo due differenti approcci, nei quali non è richiesta la compattezza di KN e nemmeno che g sia contrattiva o identicamente nulla. Nel primo approccio [5], consideriamo quale X lo spazio delle funzioni misurabili su D e usiamo la proprietà di *regolarizzazione* dell'operatore integrale per provare esistenza e unicità di una soluzione positiva e *continua*, utilizzando la convergenza puntuale delle iterazioni di Picard (4). Le sopracitate monotonie delle iterazioni pari e dispari assicurano pure la convergenza *uniforme* sui compatti di D, in virtù di un teorema del Dini. Diversamente, nel secondo approccio [7], dove $X = BC(D)$, è fondamentale l'uso delle iterazioni di Picard di tipo semi-implicito

$$u_{n+1} = KN(u_n) + G(u_{n+1}), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

insieme all'analisi costruttiva sviluppata in [4]. Si assume solamente che g sia continua e sublineare, con $u \mapsto u - g(u)$ strettamente crescente e non limitata, indebolendo in modo sostanziale le ipotesi di [3]; inoltre si prova la convergenza uniforme su tutto D.

Una tecnica costruttiva viene usata anche per equazioni integrali «quadratiche» del tipo

$$a(x)\,\phi(x) + \phi(x) \int_D \mathcal{K}(x, t)\,\phi(t)\,dt = b(x), \qquad x \in D \subseteq \mathbb{R}^d, \tag{6}$$

dove a, b: $D \to \mathbb{R}^+$ e $\mathcal{K}: D^2 \to \mathbb{R}^+$ sono misurabili, assumendo $ab > 0$ q.o., b, b/a, $\mathcal{K}(x, \cdot)\, b/a \in L^1(D)$ e che il nucleo $\mathcal{K}(x, t)$ sia *simmetrico*. Tali equazioni generalizzano certi casi stazionari puramente integrali della ben nota equazione di Boltzmann [2]; in questa applicazione D è non limitato, in effetti $D = \mathbb{R}^3$ o $D = (0, +\infty)$. Applicando la *trasformazione razionale* $\phi = b/(a(1+u))$, l'equazione (6) può essere riscritta sotto forma di equazione di Hammerstein (2), con il nucleo trasformato

$$k(x, t) = \frac{\mathcal{K}(x, t)\, b(t)}{a(x)\, a(t)}. \tag{7}$$

Ancora una volta la convergenza delle iterazioni di Picard (ma ora in $X = \mathcal{M}(D)$, lo spazio delle funzioni misurabili su D modulo la coincidenza quasi ovunque), fornisce esistenza e unicità di una soluzione positiva e misurabile u^*, che corrisponde tramite la trasformazione sopra citata all'unica soluzione $\phi^* \in L^1_+(D)$ (quest'ultimo è lo spazio funzionale naturale dal punto di vista fisico). Inoltre, le iterazioni trasformate $\phi_n = b/(a(1 + u_n))$ convergono a ϕ^* in $\|\cdot\|_{L^1}$, uniformemente sui compatti di D sotto opportune ipotesi di regolarizzazione [6]. Il nostro approccio, che sfrutta in modo cruciale la *simmetria* del nucleo, evita le usuali ipotesi di limitatezza (essenziale) di $\int_D k(\cdot, t)\, dt$, migliorando i risultati presenti in letteratura, cf. [2], [4].

Infine, si considera l'analisi di convergenza di alcuni metodi *iterativi* stazionari con *rilassamento* per equazioni di Hammerstein (sia finito che infinito-dimensionali) di tipo (1), nel caso non perturbato $u = KN(u)$. Si prova il seguente *risultato generale* [8]: sia X uno spazio di Banach parzialmente ordinato da un cono *normale* P, ed A, E, $F : P \to P$ *operatori decrescenti* con $A = E + F$ *completamente continuo* e privo di punti fissi accoppiati confrontabili [4], e si assuma che $u = E(u) + b$ abbia un'unica soluzione in P per ogni $b \in P$. Allora la successione $\{u_n\}$, definita da

$$\begin{cases} u_{n+1/2} = E(u_{n+1/2}) + F(u_n) \\ u_{n+1} = (1-\omega)\, u_n + \omega u_{n+1/2}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{8}$$

converge, per $\omega \in (0, 1]$, all'unico punto fisso di A in P, qualunque sia $u_0 \in P$.

Come applicazione, si ottiene che il metodo *SOR* non lineare, e le versioni *rilassate* dei metodi di *Picard*, *Updated Picard*, *Jacobi* sono *globalmente* convergenti in $\mathbb{R}^m_+$ all'unica soluzione positiva del sistema

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{k_{ij}}{1 + u_j}, \qquad i = 1, \dots, m, \tag{9}$$

che si ottiene dalla discretizzazione dei sopracitati modelli di Chandrasekhar e di Boltzmann (cf. (3)); si osservi che la convergenza non è deducibile dai risultati classici sul rilassamento nonlineare.

I quattro solutori rilassati (implementati in ambiente MATLAB) sono stati testati sulla *discretizzazione trapezoidale* della versione «decrescente» dell'*equazione di Chandrasekhar* (riscritta nella formulazione di tipo Hammerstein), nel caso di «scattering» isotropo,

$$h(x) = \frac{\lambda}{1 - 2\lambda} \int_0^1 \frac{t}{x+t}\, \frac{1}{1 + h(t)}\, dt, \qquad x \in [0, 1], \tag{10}$$

cf. (2). La quantità $2\lambda \in (0, 1)$ è una costante fisica chiamata *albedo*, che misura la frazione di radiazione perduta a causa dello scattering (il vincolo $2\lambda < 1$ corrisponde ad un modello non conservativo). Il confronto con solutori efficienti di tipo Newton mostra come, in corrispondenza al parametro ottimale di rilassamento, i metodi considerati funzionano in modo molto soddisfacente; in particolare, *Updated Picard* si rivela una valida alternativa al ben noto metodo di Broyden [1]. Si osservi che, grazie alla proprietà di *mesh-independence*, il parametro ottimale può essere stimato a basso costo già su una discretizzazione «rozza» del problema integrale e convenientemente utilizzato su discretizzazioni piú fini. Un'interpretazione qualitativa della «mesh-independence» è legata all'esistenza, per i metodi studiati, di una controparte infinito-dimensionale le cui proprietà di convergenza (assicurata dalla generalità del risultato principale) vengono «ereditate» sulle discretizzazioni. Va ricordato che il metodo *Updated Picard* (non rilassato) era già stato utilizzato nella letteratura fisica [2]: l'analisi di convergenza sviluppata nella tesi fornisce ora una base teorica ai solutori di tipo *Picard* nelle applicazioni alla teoria del trasporto, inserendoli nel contesto piú generale dei metodi iterativi rilassati per problemi di punto fisso con operatori «decrescenti».

BIBLIOGRAFIA

[1] K. E. ATKINSON, *A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equations*, J. Integral Equations Appl., **4** (1992).

[2] V. C. BOFFI, G. SPIGA and J. R. THOMAS, *Solution of a nonlinear integral equation arising in particle transport theory*, J. Comput. Phys., **59** (1985), 96-107.

[3] L. ERBE, D. GUO and X. LIU, *Positive solutions of a class of nonlinear integral equations and applications*, J. Integral Equations Appl., **4** (1992), 179-195.

[4] D. GUO, *Positive fixed points and eigenvectors of noncompact decreasing operators with applications to nonlinear integral equations*, Chin. Ann. of Math. (Ser. B), **4** (1993), 419-426.

[5] A. SOMMARIVA and M. VIANELLO, *Approximating fixed-points of decreasing operators in spaces of continuous functions*, Numer. Funct. Anal. Optim., **19** (1998), 635-646.

[6] A. SOMMARIVA and M. VIANELLO, *Constructive analysis of purely integral Boltzmann models*, J. Integral Equations Appl., **11** (1999).

[7] A. SOMMARIVA and M. VIANELLO, *Constructive approximation for a class of perturbed Hammerstein integral equations*, Nonlinear Anal., in corso di stampa.

[8] A. SOMMARIVA and M. VIANELLO, *Computing positive fixed-points of decreasing Hammerstein operators by relaxed iterations*, J. Integral Equations Appl., in corso di stampa.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: alvise@math.unipd.it
Dottorato in Matematica Computazionale (sede amministrativa: Università di Padova) - Ciclo XI
Direttore di ricerca: Prof. Igor Moret, Università di Trieste
Correlatore: Dott. Marco Vianello, Università di Padova