
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

SILVIA SECCO

Stime $L^p - L^q$ per operatori di convoluzione e integrazione frazionaria lungo curve

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.1S, p. 217–220.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_217_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_217_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Stime $L^p - L^q$ per operatori di convoluzione e integrazione frazionaria lungo curve.

SILVIA SECCO

In questa tesi affrontiamo due problemi strettamente correlati tra loro: il cosiddetto fenomeno di L^p -improving per curve nello spazio e il problema dell'integrazione frazionaria lungo curve.

Entrambi gli argomenti riguardano il problema della determinazione esatta di quei valori $(1/p, 1/q) \in [0, 1] \times [0, 1]$ per cui un dato operatore di convoluzione con una misura a supporto su di una curva risulta limitato da L^p a L^q , ossia la determinazione dell'insieme caratteristico di un tale operatore. In particolare diciamo che la misura è L^p improving se l'insieme caratteristico del corrispondente operatore di convoluzione non si riduce alla sola diagonale $1/p = 1/q$. Nel caso dell' L^p -improving intervengono curve limitate, nel caso dell'integrazione frazionaria le curve sono illimitate, omogenee e con densità della misura omogenea.

Questi problemi si pongono più in generale per superfici S , e sono strettamente correlati alle loro proprietà di curvatura. Più precisamente le proprietà di curvatura delle superfici S considerate determinano il decadimento all'infinito della trasformata di Fourier delle misure supportate su S e consentono la trattazione dei corrispondenti operatori di convoluzione mediante la teoria degli integrali oscillanti e degli operatori integrali di Fourier. Mentre in letteratura esistono risultati abbondanti per le ipersuperfici, la teoria risulta molto più lacunosa per superfici di codimensione maggiore di uno. Per questo motivo le curve in dimensione tre rivestono un ruolo particolare. Solo recentemente M. Christ ha ottenuto i primi risultati per curve particolari in spazi di dimensione generica.

In questa tesi studiamo quindi il problema dell' L^p -improving e quello dell'integrazione frazionaria dapprima per curve in $\mathbf{R}^3$ e successivamente per curve nel gruppo di Heisenberg $\mathbf{H}_1$.

1. - L^p -improving e integrazione frazionaria lungo curve in $\mathbf{R}^3$.

In $\mathbf{R}^3$ consideriamo la curva omogenea

$$(1) \quad \Gamma(t) = (t^\alpha, t^\beta, t^\gamma), \quad t > 0$$

dove supponiamo $0 < \alpha < \beta < \gamma$ e, data $f \in C_c(\mathbf{R}^3)$, per $\sigma \in \mathbf{C}$ con $\Re \sigma > 0$ definiamo il nucleo $\langle K^\sigma, f \rangle = \int_0^{+\infty} f(\Gamma(t)) t^{\sigma-1} dt$. K^σ è il nucleo di integrazione frazionaria di ordine σ lungo la curva Γ .

Chiamiamo «operatore di integrazione frazionaria di ordine σ lungo Γ » l'ope-

ratore T^σ di convoluzione con il nucleo K^σ

$$(2) \quad T^\sigma f(x) = \int_0^{+\infty} f(x - \Gamma(t)) t^{\sigma-1} dt, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

Per l'omogeneità del nucleo K^σ , una condizione necessaria affinché l'operatore T^σ sia limitato da $L^p(\mathbf{R}^3)$ a $L^q(\mathbf{R}^3)$ è che $1/p - 1/q = \Re \sigma / (\alpha + \beta + \gamma)$. Nel caso in cui $\sigma \in \mathbf{R}$, $\sigma > 0$, per i risultati ottenuti in [2] relativi all'operatore definito limitando l'integrazione in (2) ad un intervallo limitato di $\mathbf{R}$ non contenente l'origine, un'altra condizione necessaria è che il punto $(1/p, 1/q)$ appartenga al trapezio chiuso di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2/3, 1/2)$, $D = (1/2, 1/3)$. Inoltre, sempre per quanto riguarda le proprietà di limitatezza di T^σ come operatore da $L^p(\mathbf{R}^3)$ a $L^q(\mathbf{R}^3)$, la letteratura esistente fornisce solo risultati parziali relativi a curve omogenee in $\mathbf{R}^3$, con ipotesi artificiali sugli esponenti di omogeneità α, β, γ e, di conseguenza, sul tipo di degenerazione di curvatura e torsione nell'origine. Nella tesi rimuoviamo queste ipotesi e dimostriamo il seguente teorema generale, [3].

TEOREMA 1. — *Per $\Re \sigma > 0$, sia T^σ l'operatore definito in (2). T^σ è limitato da $L^p(\mathbf{R}^3)$ a $L^q(\mathbf{R}^3)$ se e solo se $(1/p, 1/q) \in ABCD$ e $1/p - 1/q = \Re \sigma / (\alpha + \beta + \gamma)$ dove $ABCD$ è il trapezio chiuso di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2/3, 1/2)$, $D = (1/2, 1/3)$.*

La dimostrazione di questo risultato richiede delle stime dettagliate sul comportamento all'infinito nelle varie direzioni, della trasformata di Fourier delle misure lungo le curve. Questo consente di applicare un metodo introdotto da M. Christ in [1] per curve nel piano basato sull'utilizzo di una decomposizione di Littlewood-Paley adattata all'omogeneità delle curve considerate.

Consideriamo ora la misura lunghezza d'arco ds sull'arco Γ_0 ottenuto prendendo $t \in [0, 1]$ e l'operatore di convoluzione $f \mapsto \int_{\Gamma_0} f(x - \Gamma(t)) ds$, $x \in \mathbf{R}^3$. È conveniente esprimere la misura ds rinormalizzando gli esponenti della curva (1) in modo da ottenere $\alpha = 1$, allora il precedente operatore diventa essenzialmente

$$(3) \quad T_0 f(x) = \int_0^1 f(x - (t, t^\beta, t^\gamma)) dt, \quad x \in \mathbf{R}^3.$$

Il Teorema 1.1 ci consente di ottenere stime L^p - L^q ottimali per l'operatore (3), vale infatti il seguente risultato, [3].

COROLLARIO 1. — *Sia T_0 l'operatore definito in (3) e sia $Q = 1 + \beta + \gamma$. Allora*

(i) *se $\beta + \gamma \geq 5$ l'insieme caratteristico dell'operatore T_0 è il trapezio chiuso di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C' = ((Q-2)/Q, (Q-3)/Q)$, $D' = (3/Q, 2/Q)$;*

(ii) *se $\beta + \gamma < 5$ l'insieme caratteristico dell'operatore T_0 è il trapezio chiuso di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2/3, 1/2)$, $D = (1/2, 1/3)$.*

2. - L^p -improving e integrazione frazionaria lungo curve sul gruppo di Heisenberg.

Sia $\mathbf{H}_1$ il gruppo di Heisenberg, cioè $\mathbf{R}^3$ con il prodotto $(x, y, t) \cdot (x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + \frac{1}{2}(xy' - x'y))$.

Consideriamo una curva γ in $\mathbf{H}_1$ con vettore tangente in ogni punto mai parallelo al centro del gruppo. Senza perdere di generalità possiamo considerare la curva $\gamma(s) = (s, \phi_1(s), \phi_2(s))$ dove s appartiene ad un intervallo limitato $I \subseteq \mathbf{R}$ e $\phi_1(s), \phi_2(s)$ sono funzioni C^∞ a valori reali. Data $f \in C_c(\mathbf{H}_1)$, definiamo la misura $\langle \mu, f \rangle = \int_I f(\gamma(s)) ds$ a supporto sulla curva γ e consideriamo l'operatore di convoluzione a destra con μ

$$(4) \quad Tf(w) = \int_I f(w \cdot (\gamma(s))^{-1}) ds \quad w \in \mathbf{H}_1.$$

Se in (4) sostituiamo la convoluzione sul gruppo di Heisenberg con l'usuale convoluzione in $\mathbf{R}^3$, allora le proprietà di L^p -improving di T sono determinate dalle proprietà di curvatura e di torsione di γ , [2], [3]. In particolare, se $\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)$ generano $\mathbf{R}^3$ per ogni $s \in I$ (o equivalentemente, se $\begin{vmatrix} \phi_1''(s) & \phi_2''(s) \\ \phi_1'''(s) & \phi_2'''(s) \end{vmatrix} \neq 0$ per ogni $s \in I$) allora l'insieme caratteristico di T è il trapezio chiuso di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2/3, 1/2)$, $D = (1/2, 1/3)$, [2]. Anche nel caso del gruppo di Heisenberg troviamo la condizione di curvatura per la quale l'insieme caratteristico dell'operatore (4) può essere l'intero trapezio ottimale $ABCD$. Inoltre stabiliamo anche una nozione di curvatura destra e una nozione di curvatura sinistra che non sono mutuamente equivalenti. Per l'operatore (4) vale infatti il seguente teorema, [4].

TEOREMA 2. - Sia T l'operatore dato in (5) e sia $D(s) = \begin{vmatrix} \phi_1''(s) & \phi_2''(s) \\ \phi_1'''(s) & \phi_2'''(s) \end{vmatrix}$;

(i) T è limitato da $L^{3/2}(\mathbf{H}_1)$ a $L^2(\mathbf{H}_1)$ se

$$(5) \quad D(s) \neq -(\phi_1''(s))^2/2 \quad \text{per ogni } s \in I;$$

(ii) T è limitato da $L^2(\mathbf{H}_1)$ a $L^3(\mathbf{H}_1)$ se

$$(6) \quad D(s) \neq (\phi_1''(s))^2/2 \quad \text{per ogni } s \in I.$$

Per meglio comprendere le condizioni (5) e (6) introduciamo una nozione di derivate successive di γ che sia invariante rispetto all'azione del gruppo $\mathbf{H}_1$. Dobbiamo pensare a $\gamma'(s)$ come ad un elemento dello spazio tangente $T_{\gamma(s)}\mathbf{H}_1$ nel punto $\gamma(s)$. Prima di derivare ulteriormente, dobbiamo trasportare i vari $\gamma'(s)$ in uno stesso spazio tangente. Quindi consideriamo la traslazione destra $R_{\gamma(s)}: \mathbf{H}_1 \rightarrow \mathbf{H}_1$ che mappa (x, y, t) in $(x, y, t) \cdot \gamma(s)$. Il differenziale $dR_{\gamma(s)}$ mappa lo spazio tangente $T_0\mathbf{H}_1$ su $T_{\gamma(s)}\mathbf{H}_1$. Definiamo quindi $\gamma'_R(s) = dR_{\gamma(s)}^{-1}\gamma'(s)$. A questo punto possiamo porre $\gamma''_R(s) = \frac{d}{ds}\gamma'_R(s)$ e $\gamma'''_R(s)$ analogamente.

La condizione (5) è allora equivalente a richiedere che $\gamma'_R(s), \gamma''_R(s), \gamma'''_R(s)$ siano linearmente indipendenti per ogni $s \in I$. Sostituendo le traslazioni destre con quelle sinistre otteniamo la corrispondente interpretazione di (6).

Il procedimento usato nella dimostrazione del Teorema 2 consiste nel ridurre il problema tridimensionale per le curve prima a un problema per superfici, e quindi a una famiglia di problemi bidimensionali.

Un aspetto interessante che emerge dal precedente studio e soprattutto dall'analisi dettagliata dell'insieme caratteristico di un operatore di convoluzione con una misura finita a supporto sulla cubica gobba $\gamma_\alpha(s) = (s, s^2, \alpha s^3)$, $s \in [0, 1]$, $\alpha \in \mathbf{R}$ o sulla famiglia più ampia di curve $\Gamma_\beta(s) = (s, s^2, -s^3/6 + s^\beta)$ dove $\beta > 3$ e $s \in [0, \delta]$ per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, è una forma di asimmetria dei risultati, che non si verifica mai nel caso abeliano. Fenomeni di asimmetria per operatori di convoluzione su gruppi non abeliani sono noti da tempo e sono stati ampiamente studiati nel caso $p = q$, ma finora non erano disponibili esempi semplici nel caso $p < q$.

Nell'ultima parte della tesi, affrontiamo il problema dell'integrazione frazionaria sul gruppo di Heisenberg. In particolare consideriamo la cubica gobba $\gamma_\alpha(s) = (s, s^2, \alpha s^3)$, $s > 0$ $\alpha \in \mathbf{R}$ e, per $\sigma \in \mathbf{C}$ con $\Re \sigma > 0$, definiamo l'operatore di integrazione frazionaria di ordine σ lungo γ_α

$$(7) \quad T_\alpha^\sigma f(w) = \int_0^{+\infty} f(w \cdot (\gamma_\alpha(s))^{-1}) s^{\sigma-1} ds, \quad w \in \mathbf{H}_1.$$

In questo contesto il problema dello studio dell'insieme caratteristico dell'operatore (5) presenta maggiori difficoltà rispetto al caso abeliano, non essendo disponibile la trasformata di Fourier negli stessi termini del caso abeliano. Per questo motivo, non possiamo determinare completamente l'insieme caratteristico dell'operatore (5) per $\sigma \in \mathbf{C}$ generico con $\Re \sigma > 0$. Come conseguenza dell'omogeneità della curva γ_α e dei risultati ottenuti per l'operatore di convoluzione con una misura finita supportata sulla cubica gobba γ_α , siamo però in grado di determinare completamente l'insieme caratteristico dell'operatore (7) nel caso in cui $\sigma = 1$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. CHRIST, *Endpoint bounds for singular fractional integral operators*, Preprint.
- [2] D. M. OBERLIN, *Convolution estimates for some measures on curves*, Proc. Amer. Math. Soc., **99** (1987), 56-60.
- [3] S. SECCO, *Fractional integration along homogeneous curves in $\mathbf{R}^3$* , Math. Scand., in corso di stampa.
- [4] S. SECCO, *L^p -improving properties of measures supported on curves on the Heisenberg group*, Studia Math., **132** (2) (1999), 179-201.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
e-mail: secco@calvino.polito.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Torino) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Fulvio Ricci