Riccardo Rosso

Adesione di membrane fluide

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 209–212.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_209_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 209-212

Adesione di membrane fluide.

RICCARDO ROSSO

Questa tesi riguarda alcuni problemi matematici che si presentano nello studio di membrane lipidiche. Le membrane lipidiche sono state studiate a partire dai primi anni '70, sia per le applicazioni in biologia che per i problemi affascinanti che pongono. Esse vivono in ambiente liquido, sono inestendibili, a temperature ordinarie sono fluide e presentano diverse modalità di aggregazione. Tra queste ricordiamo le vescicole, descritte come superficie compatte bidimensionali nello spazio euclideo ordinario e d i tubuli, descritti come cilindri cavi, al cui interno il fluido ambiente può entrare o uscire liberamente. Caratteristica comune a tutte queste membrane è quella di essere delle superficie *elastiche*, la cui energia libera $\mathcal{F}$ è data dal funzionale

$$\mathcal{F}[\mathcal{S}] = \int_{\mathcal{S}} \psi(\sigma_1, \sigma_2)\, da\,, \tag{1}$$

dove ψ è una funzione regolare delle curvature principali σ_1 e σ_2 della superficie $\mathcal{S}$ che rappresenta la membrana, mentre a è la misura di area. Una scelta frequente in letteratura è

$$\psi(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{k_c}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)^2, \tag{2}$$

in cui $k_c > 0$ è un coefficiente costitutivo. Nel caso dei tubuli, l'energia libera si può ridurre ad un funzionale che dipende dal contorno c comune a tutte le sezioni

$$\mathcal{F}[c] = \int_c \psi(\sigma)\, dl\,, \tag{3}$$

dove σ è la curvatura di c ed l è la misura di lunghezza. In questo caso (2) diviene

$$\psi(\sigma) = \frac{k_c}{2}\sigma^2. \tag{4}$$

Molti lavori (per un resoconto, si veda [1]) hanno riguardato la soluzione per via numerica dell'equazione di equilibrio associata a (1), in presenza di vincoli geometrici. Questa tesi pone invece l'accento sui tubuli, indicando un metodo per trovarne le forme di equilibrio *esatte*. L'idea è quella di sfruttare il legame tra la curvatura di una curva e l'ascissa curvilinea della curva focale ad essa associata. In questo modo, l'equazione di equilibrio per una classe di funzionali che comprende (3) si riduce ad una equazione *non differenziale*. Grazie a questa tecnica è stato possibile trovare in [2] le forme di equilibrio di tubuli spessi in un campo magnetico uniforme, stabilendo le condizioni per l'esistenza e l'unicità della soluzione al variare dell'intensità del campo applicato.

L'*adesione* di membrane lipidiche a dei supporti costituisce un meccanismo fondamentale nella formazione di tessuti biologici. Il modello di adesione più semplice introduce una energia $\mathcal{F}_w$ proporzionale all'area della porzione $\mathcal{S}\mathcal{S}_*$ di membrana a contatto con un'altra superficie:

$$\mathcal{F}_w[\mathcal{S}\mathcal{S}_*] = -\,w \text{ area } (\mathcal{S}_*)\,, \tag{5}$$

dove $w > 0$ è un parametro costitutivo, detto *potenziale di adesione*. La (5) introduce una discontinuità nella densità di energia libera, che si riflette in una discontinuità delle curvature principali della membrana nei punti di distacco dal supporto. In particolare, per la curvatura di un tubulo nei punti di distacco, sono state ottenute delle condizioni di *salto* che mostrano il ruolo giocato nell'adesione dalla curvatura del supporto adesivo. Infatti, sia p^* un pu nto di distacco, c^* la parte libera del contorno c del tubulo e c_* la parte aderita. Il *salto* $[\![f(s)]\!]$ di una funzione $f(s)$ definita su c è

$$[\![f(s)]\!] := \lim_{\substack{p \in c_* \\ p \longrightarrow p^*}} f(s) - \lim_{\substack{p \in c^* \\ p \longrightarrow p^*}} f(s)\,, \tag{6}$$

dove s è la lunghezza d'arco su c. È possibile allora dimostrare che la condizione di salto da imporre è

$$\left[\!\!\left[\frac{d\psi}{d\sigma} \right]\!\!\right] \sigma_* + [\![\psi - \sigma]\!] - w = 0\,, \tag{7}$$

dove σ_* è la curvatura del supporto in p^*. Grazie a questa condizione e con l'ausilio della costruzione della curva focale si possono ottenere analiticamente le forme di equilibrio per tubuli aderiti, e confrontare adesioni a supporti di differente geometria (vedi [3]-[4]).

Nel caso delle vescicole, sono stati affrontati due problemi tra loro connessi. Il primo, di carattere metodologico, è consistito nello scrivere in forma intrinseca, cioè senza fare ricorso ad alcun sistema di coordinate, le equazioni di equilibrio per una vescicola. Oltre a porre chiarezza in un nebuloso dibattito sul modo di trattare certe particolari variazioni, il risultato ottenuto presenta una notevole generalità, perché valido per un'energia libera che è una funzione generica della curvatu ra totale $H := \sigma_1 + \sigma_2$ e della curvatura gaussiana $K := \sigma_1\sigma_2$ della membrana. Esso ha anche svolto una funzione propedeutica al secondo problema affrontato, l'analisi delle condizioni di equilibrio che si presentano quando una vescicola *aperta* può aderire ad un supporto. In questo caso, la vescicola presenta un *bordo* ed un *contorno adesivo*: il primo è il suo bordo geometrico, il secondo è il luogo dei punti nei quali le curvature principali possono ess ere discontinue. Se la membrana aderisce al supporto lungo una regione di area non nulla, nella ricerca dell'equilibrio essa può scorrere lungo il proprio piano tangente che è anche il piano tangente al supporto. Al contrario, se la membrana è attaccata al supporto solo lungo il bordo, ma rimane distaccata altrove, gli spostamenti ammissibili del bordo possono non essere diretti lungo il piano tangente della membrana. Questa distinzione assume un ruolo importante perché conduce a condizioni di equil ibrio radicalmente differenti. Infatti, lungo un contorno adesivo si ottiene ancora una condizione di salto che estende la (7), ed è data da (per i dettagli, si veda [5])

$$\begin{aligned}[\![\psi]\!]\,\boldsymbol{\nu}\mathcal{S}^* - w\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{S}^*} - \left[\!\!\left[\frac{\partial\psi}{\partial H}(\nabla_{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{\nu})\,\mathbf{I} + K\frac{\partial\psi}{\partial K}\mathbf{I} \right]\!\!\right] \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{S}^*} - \\ -(\nabla_{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{\nu}) \left[\!\!\left[\frac{\partial\psi}{\partial K}(\nabla_{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{\nu}) - \frac{\partial\psi}{\partial K}H\mathbf{I} - \frac{\partial\psi}{\partial H}\mathbf{I} \right]\!\!\right] \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{S}^*} = \mathbf{0}\,,\end{aligned} \tag{8}$$

dove $\mathbf{I}$ è l'identità, $\boldsymbol{\nu}$ e $\boldsymbol{\nu}_*$ i versori normali alla parte libera e a quella aderita della membrana, $\nabla_s \boldsymbol{\nu}$ e $\nabla_s \boldsymbol{\nu}_*$ i rispettivi gradienti superficiali, mentre $\boldsymbol{\nu}_{S^*}$ è la normale principale al contorno adesivo. Quanto ai bordi, vi sono in generale due condizioni di equilibrio indipendenti:

$$\frac{\partial \psi}{\partial H} = \kappa_n \frac{\partial \psi}{\partial K}, \tag{9}$$

e

$$\tan \vartheta_c = \frac{\psi + \lambda - \gamma \kappa_g}{((\nabla_s \boldsymbol{\nu}) - H\mathbf{I})\, \nabla_s\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial K}\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_S - \nabla_s \dfrac{\partial \psi}{\partial H} \cdot \boldsymbol{\nu}_S + \gamma \kappa_n + \nabla_s\left(\tau_g \dfrac{\partial \psi}{\partial K}\right) \cdot \mathbf{t}}, \tag{10}$$

dove figurano l'*angolo di contatto* ϑ_c tra la membrana ed il supporto, il versore tangente $\mathbf{t}$ al bordo e le proprietà geometriche di quest'ultimo: la *curvatura normale* κ_n, la curvatura geodetica κ_g e la torsione geodetica τ_g. Inoltre, γ è la densità lineare di energia associata alla presenza del bordo e λ è il moltiplicatore associato all'inestendibilità della membrana. Queste condizioni al contorno sono state utilizzate per determinare la stabilità di bordi, nel caso in cui la membrana aderisca a supporti dotati di simmetria assiale.

I problemi descritti sinora hanno riguardato la statica delle membrane lipidiche. Per quanto concerne la dinamica, occorre descrivere sia le interazioni con il fluido-ambiente che la dissipazione di energia interna alla membrana. È stato possibile ricavare l'equazione di evoluzione in presenza di un supporto adesivo, partendo da un principio di dissipazione introdotto originalmente da LESLIE nello studio di flussi di cristalli liquidi nematici. Questo principio postula che

$$\dot{\mathcal{E}} + \mathcal{D} = 0, \tag{11}$$

dove $\dot{\mathcal{E}}$ denota la derivata temporale dell'energia meccanica $\mathcal{E}$ in una regione di controllo contentente la membrana, mentre $\mathcal{D}$ rappresenta l'energia dissipata in questa regione. Grazie ad alcune ipotesi semplificatrici, nel caso di un tubulo in prossimità di un supporto adesivo piatto le equazioni di evoluzione assumono la forma seguente

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\psi}{d\sigma}\right)'' + w \cos \vartheta \dfrac{df}{dy} - \alpha\sigma = -\gamma_n v_n \\ \left(wf + \psi - \dfrac{d\psi}{d\sigma}\sigma - \alpha\right)' = -\gamma_t v_t, \end{cases} \tag{12}$$

dove γ_t e γ_n sono coefficienti di viscosità introdotti per descrivere l'interazione della membrana con il fluido, v_t e v_n sono, rispettivamente, le componenti della velocità del tubulo lungo la direzione tangente e normale, mentre l'apice $'$ indica la derivazione rispetto all'ascissa curvilinea s. La funzione $\alpha(s)$ è un moltiplicatore introdotto per via della inestendibilità locale della membrana, ϑ è l'angolo che la tangente al tubulo forma con il supporto, mentre l'interazione tra il tubulo ed il supporto viene descritta dal funzionale

$$\int_0^L wf(y(s))\, ds \,, \tag{13}$$

per un'opportuna costante w e una funzione f della distanza locale $y(s)$ tra i punti della membrana ed il supporto. Nel caso semplice di evoluzione libera ($w = 0$) e di dissipazione trascurabile lungo la direzione tangente ($\gamma_t = 0$), le (12) si riducono ad un'unica equazione che può essere linearizzata per studiare l'evoluzione di soluzioni il cui profilo è prossimo ad una circonferenza. Si mostra così che il decadimento è *esponenziale*, si determinano i tempi di rilassam ento alla forma circolare delle varie armoniche e si ricava la forma asintotica di evoluzione. Questi risultati sono inquadrati in una prospettiva più ampia, se vengono confrontati con l'evoluzione per curvatura. Anche se l'evoluzione per curvatura non conserva la lunghezza della curva, è possibile un confronto a patto di introdurre un riscalamento dipendente dal tempo che ne rinormalizzi ad ogni istante la lunghezza. In questo modo, è possibile vedere che il rilassamento ad una circonferenza della cu rva riscalata avviene secondo un decadimento *polinomiale*. Ciò mostra le peculiarità di (12), che ha piuttosto aspetti in comune con l'evoluzione per laplaciano di curvatura.

BIBLIOGRAFIA

[1] SEIFERT U., *Configurations of fluid membranes and vesicles*, Adv. Phys., **46** (1997), 13-137.
[2] ROSSO R., VIRGA E. G., *Adhesion of lipid tubules in an assembly*, Euro. Jnl. Applied Mathematics, **9** (1998), 485-506.
[3] ROSSO R., VIRGA E. G., *Exact statics and approximate dynamics of adhering lipid tubules*, Continuum Mech. Thermodyn., **10** (1998), 107-119.
[4] ROSSO R., VIRGA E. G., *Adhesion by curvature of lipid tubules*, Continuum Mech. Thermodyn, **10** (1998), 359-367.
[5] ROSSO R., VIRGA E. G., *Adhesive borders of lipid membranes*, to appear in Proc. R. Soc. London A (1999).

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, via Ferrata 1, 27100 Pavia
email: Rosso@dimat.unipv.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo X
Direttore della Ricerca: Prof. Epifanio G. Virga, Università di Pavia