Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Valeria Ricci

Derivazioni di equazioni cinetiche da sistemi di particelle

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 197–200.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_197_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 197-200

Derivazioni di equazioni cinetiche da sistemi di particelle.

VALERIA RICCI

1. – Introduzione.

L'equazione di Boltzmann

$$(1)\qquad \partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v}\cdot\partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) =$$

$$= \int_{R^3} d\mathbf{v}_1 \int_0^\infty db \int_0^{2\pi} d\varepsilon b |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| (f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)\, f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1', t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)),$$

$\mathbf{x} \in R^3$, introdotta all'inizio del secolo per la descrizione del comportamento di un gas in opportune condizioni di rarefazione, presenta ancora numerosi problemi aperti, tra i quali quello della dimostrazione di un teorema di validità globale, cioè un teorema che stabilisca la possibilità di derivare tale equazione a partire dalle equazioni del moto che definiscono la dinamica di un sistema di N particelle.

Più precisamente il problema considerato è, assegnato un sistema dinamico costituito da N particelle identiche e una densità di probabilità iniziale $P_{N,0}(z_N, t)$ nello spazio delle fasi del sistema $\Gamma_N \subset R^{dN} \times R^{dN}$ (d è la dimensione), ricavare dall'equazione di evoluzione per la densità di probabilità $P_N(z_N, t)$, in un opportuno limite, un'equazione che descriva l'evoluzione della densità di probabilità relativa ad una particella.

A questo scopo è necessario non solo dimostrare la convergenza delle soluzioni della gerarchia di N equazioni per le distribuzioni marginali

$$P_s(z_s, t) = \int d\mathbf{z}_{s+1} \dots d\mathbf{z}_N P(z_N, t) \qquad s = 1\dots, N$$

ottenute dall'equazione d'evoluzione per $P_N(z_N, t)$ (*gerarchia BBGKY*) alle soluzioni di una analoga gerarchia, relativa a un numero infinito di equazioni, associata all'equazione di Boltmann (*gerarchia Boltzmann*; la prima equazione di tale gerarchia è

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v}\cdot\partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) =$$

$$= \int_{R^3} d\mathbf{v}_1 \int_0^\infty db \int_0^{2\pi} d\varepsilon b |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| (f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}', \mathbf{x}, \mathbf{v}_1', t) - f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t))$$

dove $f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t)$ indica la distribuzione marginale a due particelle, che diventa 1 se

$$f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1, t)\, f(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2, t)$$

cioè se si ha *caos molecolare*), ma anche l'esistenza di una soluzione fattorizzata.

Il limite opportuno in cui si ottiene 1 è detto *limite di Boltzmann-Grad* e, nel caso di un sistema costituito da sfere di raggio σ che interagiscono tramite urti elastici (*sfere dure*), corrisponde al limite in cui $N \to \infty$, $\sigma \to 0$, $N\sigma^{d-1} \to \lambda$, dove λ è una costante proporzionale all'inverso del cammino libero medio; tale limite è dunque un limite di bassa densità ($N\sigma^3 \to 0$) in cui il cammino libero medio si mantiene finito.

Lo studio della derivabilità della 1 e delle sue generalizzazioni da sistemi di particelle con interazione deterministica o stocastica riveste importanza sia dal punto di vista della fisica di base, per meglio comprendere la teoria cinetica dei gas, che dal punto di vista applicativo, per lo studio di sistemi di importanza pratica.

Dal punto di vista della teoria rigorosa uno dei risultati di maggior rilevanza è il seguente teorema di validità locale, che afferma la possibilità di derivare l'equazione di Boltzmann da un sistema di sfere dure in un intervallo di tempo t_0 corrispondente a una frazione del cammino libero medio ([1]):

TEOREMA 1 (**Lanford, 1975**). – *Sia* $F_{s,0} = \prod_{i=1}^{s} f_0(\mathbf{z}_i)$ $s = 1, \ldots,$ *con* f_0 *continua;*

$P_{s,0}(z_s)$ *funzioni continue su* $\Gamma_{s,\sigma} = \{z_s \in V^s \times R^{3s} \,|\, \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_{R^3} > \sigma,\ j \neq i\}$, $V \subseteq R^3$, *e nei punti collisionali;*

$P_{s,0} \xrightarrow{N \to \infty} F_{s,0}$ *uniformemente* $\forall A \subseteq \Gamma_{s,\sigma}$, $s = 1, 2, \ldots$ *compatto;*

$\exists \beta, C, b$ t.c. $\sup P_{s,0}(z_s) e^{\beta \|v_s\|^2_{R^{3s}}} \leqslant C b^s \cup s$;

Allora, $\exists t_0$ *t.c.,*^{z_s} *nel limite* $N \to \infty$, $\sigma \to 0$ *e* $N\sigma^2 \to \lambda$, *la soluzione della gerarchia BBGKY per un sistema di sfere dure, espressa come serie finita, converge q.o. alla serie formale che rappresenta la soluzione della gerarchia Boltzmann per ogni* $t \in (0, t_0)$. *Tale serie è ben definita, è soluzione unica della gerarchia Boltzmann ed è della forma*

$$F_s(z_s, t) = \prod_{i=1}^{s} f(\mathbf{z}_i, t) \qquad s = 1, \ldots$$

dove $f(\mathbf{z}, t)$ *è una soluzione debole dell'equazione di Boltzmann con valore iniziale* $f_0(\mathbf{z})$.

L'unico teorema di validità globale relativo all'equazione di Boltzmann è finora quello formulato per un gas in espansione ([2]); esistono però teoremi di validità globale riferiti all' equazione di Boltzmann lineare ([3])

$$\partial_t f(\mathbf{z}, t) + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{z}, t) = \lambda C^d \int_{S_+^{d-1}} (f(\mathbf{z}', t) - f(\mathbf{z}, t))\, |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|\, d\mathbf{n} \tag{2}$$

che hanno come sistema di particelle alla base il cosiddetto *gas di Lorentz*. In questo modello, proposto da H. A. Lorentz per descrivere il moto di un elettrone in un solido, particelle leggere, puntiformi e non interagenti tra loro (*particelle di Lorentz*) si muovono tra particelle infinitamente pesanti (*diffusori*), interagendo con questi ultimi attraverso una legge assegnata. La funzione che compare in 2 è la densità di probabilità relativa ad una particella di Lorentz.

2. – Obiettivi.

Il lavoro di ricerca svolto riguarda la derivazione di equazioni di tipo Boltzmann da sistemi di particelle con interazione stocastica ed in particolare:

i) lo studio del problema di validità dell'equazione di Boltzmann lineare assumendo una configurazione periodica dei diffusori;

ii) lo studio del problema di validità dell'equazione di Enskog-Boltzmann

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v}\cdot\partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \tag{3}$$

$$= \int_{R^3} d\mathbf{v}_1 \int_{S^2_+} d\mathbf{n}\sigma^2 \,|\mathbf{v}-\mathbf{v}_1|\,(f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)\, f(\mathbf{x}-\sigma\mathbf{n}, \mathbf{v}_1', t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\, f(\mathbf{x}+\sigma\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, t))$$

che costituisce una generalizzazione di 1 che descrive piuttosto bene il comportamento di un gas denso.

All'origine dell'interesse per lo studio del comportamento del gas di Lorentz con interazione stocastica nel caso periodico è un teorema che dimostra l'impossibilità di derivare la 2 nel caso ad interazione deterministica ([4]). Il risultato ottenuto è un teorema di validità globale per un gas in $d=2$ in cui le particelle di Lorentz interagiscono con i diffusori attraverso urti elastici che avvengono con probabilità ε ad ogni incontro tra particelle e diffusori; questi ultimi sono rappresentati da cerchi di diametro ε con centro sui punti di un reticolo quadrato di passo ε. Precisamente, indicando con $f_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ l'evoluzione indotta sulle densità di probabilità dal flusso associato al sistema dinamico che descrive il gas di Lorentz considerato, si ottiene

TEOREMA 2. – *Se* $f_0 \in L_1(R^2 \times S^1)$ *è t.c.* $f_0 \geq 0$, $\int f_0\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{v} = 1$, *per ogni* $t > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$$

in $\mathcal{D}'$ *ed* $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ *risolve l'equazione:*

$$\partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v}\cdot\partial_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{2}\int_{S^1_-} (f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t))\,|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|\,d\mathbf{n}\,.$$

Tale risultato, valido anche per altre disposizioni periodiche dei diffusori, è stato utilizzato, successivamente alla discussione della tesi, per ricavare un teorema di validità per un gas in cui i diffusori hanno probabilità ε di essere localizzati in un punto del reticolo considerato (*lattice gas*).

La dimostrazione del teorema è basata sul confronto tra i semigruppi associati rispettivamente al processo stocastico che descrive il moto di una particella di Lorentz e a quello associato alla 2: la differenza tra i due viene stimata su intervalli di tempo di ampiezza σ sufficientemente piccola da far sì che, effettuando un'espansione rispetto al numero di salti contenuti nelle traiettorie, la parte dominante di tale differenza sia dovuta ai termini a 0 e a 1 urto; la stima sulla differenza per un tempo fissato $T = k\sigma$ viene poi ottenuta sfruttando la proprietà di semigruppo. La stima che si ottiene sui piccoli tempi è una conseguenza delle proprietà ergodiche del sistema considerato.

Per quanto riguarda invece lo studio del problema di validità dell'equazione di Enskog-Boltzmann, la motivazione è nel fatto che tale equazione, grazie alla presenza in essa del diametro delle particelle, risulta matematicamente più facile da trattare di 1 (per es., per essa esiste un teorema di esistenza globale della soluzione, [5] valido sotto condizioni molto generali) e quindi anche il problema di validità, sebbene complesso a causa della non linearità dell'equazione che rende complesse le stime, potrebbe risultare meno difficoltoso di quello legato a 1. Inoltre, benché sperimentalmente 3 risulti valida, non esiste ancora una proposta per il genere di limite che dovrebbe originarla per un sistema deterministico.

Riguardo a questo problema, non sono stati ottenuti risultati.

BIBLIOGRAFIA

[1] LANFORD O.E. *Time evolution of large classical systems*, **66** (1975), 275-370.

[2] ILLNER R. e PULVIRENTI M. *Global validity of the Boltzmann equation for a two-dimensional rare gas in vacuum*, Commun. Math. Phys., **105** (1986), 189-203.

[3] GALLAVOTTI G., *Rigorous theory of the Boltzmann equation in the Lorentz gas*, Nota Interna n. 358, Istituto di Fisica, Università di Roma (1972).

[4] BOURGAIN J., GOLSE F. e WENNBERG B., *On the distribution of free path lenghts for the periodic Lorentz gas*, Commun. Math. Phys., **190** (1997), 491-508.

[5] ARKERYD L. *On the Enskog equation with large initial data*, SIAM J. Math. Anal., **21** (1990), 631-646.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza», P.le Aldo Moro 5, 00187 - Roma
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma «La Sapienza») - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Mario Pulvirenti, Univesità di Roma «La Sapienza»