Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Laura Poggiolini

Semicontinuità per integrali quasiconvessi di qualsiasi ordine e sistemi non lineari impliciti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 177–180.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_177_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 177-180

Semicontinuità per integrali quasiconvessi di qualsiasi ordine e sistemi non lineari impliciti.

LAURA POGGIOLINI

Un problema fondamentale del Calcolo delle Variazioni consiste nel trovare una funzione $\tilde{u}$ che minimizzi un funzionale integrale del tipo

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x), \ldots, D^{k-1}u(x), D^k u(x))\, dx\,,$$

tra tutte le funzioni u di una classe di funzioni ammissibili $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Useremo la seguente notazione: indicheremo il vettore $(u, Du, \ldots, D^k u)$ mediante il simbolo $D^{[k]}u$.

Il numero di elementi indipendenti di $D^{[k-1]}u$ è $m \times \sigma \equiv m \times \binom{n+k-1}{k-1}$, mentre il numero di elementi indipendenti di $D^k u$ è $m \times \tau \equiv m \times \binom{n+k-1}{k}$, quindi considereremo F come una funzione $F : \Omega \times \mathbb{R}^{m\sigma} \times \mathbb{R}^{m\tau} \to \mathbb{R}$. Inoltre indicheremo $\mathbb{R}^{m\tau}$ col simbolo $\mathbb{R}^m \otimes ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s$ (vedi più avanti per ulteriori notazioni).

Il METODO DIRETTO per risolvere questo tipo di problemi consiste nel trovare un opportuno spazio topologico (X, τ), X insieme delle funzioni ammissibili, tale che la funzione $\mathcal{F}: X \to \overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $F : u \to \int_{\Omega} F(x, D^{[k]}u(x))$ sia semicontinua inferiormente e tale che da ogni successione minimizzante si possa estrarre una successione convergente nella medesima topologia. La topologia opportuna è la topologia della convergenza debole in $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Tonelli per primo scoprì il ruolo fondamentale della convessità della funzione integranda rispetto alle derivate di ordine superiore come condizione necessaria e sufficiente per la semicontinuità inferiore nel caso del primo ordine ($k = 1$), scalare ($m = 1$) e unidimensionale ($n = 1$).

Estensioni dell'idea di Tonelli nel caso scalare ($m = 1$) al caso $n \geqslant 1$, $k = 1$ si devono a McShane, DeGiorgi e Serrin.

Nei casi di ordine superiore $k > 1$ la convessità non è più la condizione adatta (cioè non è condizione necessaria) per ottenere la semicontinuità inferiore, neppure nel caso scalare $m = 1$. Lo stesso dicasi per il caso vettoriale $m > 1$ anche con derivate del primo ordine $k = 1$. In questa tesi si mostra che in entrambi questi casi una condizione necessaria per la semicontinuità inferiore di $\mathcal{F}$ è la QUASICONVESSITÀ della funzione integranda F come introdotta da Morrey [1] per il caso $k = 1$ e generalizzata da Meyers [2] al caso $k > 1$. Ricordiamo qui la definizione di quasiconvessità di Meyers

DEFINIZIONE 1. – *Sia $f\colon \mathbb{R}^m \otimes ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s \to \mathbb{R}$ una funzione borelliana e localmente limitata e sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che f è* QUASICONVESSA *se*

$$f(A) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(A + D^k \phi(z))\, dz$$

per ogni funzione $\phi \in C_0^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$, e per ogni tensore $A \in \mathbb{R}^m \otimes ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s$.

Uno dei principali risultati di questa tesi è un teorema di semicontinuità inferiore per integrali dipendenti da derivate di ordine superiore in condizioni di Carathéodory sulla funzione F. Proveremo il seguente risultato, estendendo un risultato analogo ottenuto per $k = 1$, da Acerbi e Fusco [3] e Marcellini [4].

TEOREMA 1. – *Sia $F : \Omega \times \mathbb{R}^{m\sigma} \times \mathbb{R}^{m\tau} \to \mathbb{R}$ una funzione quasiconvessa di Carathéodory tale che*

$$\begin{aligned} &0 \leq F(x, s, \xi) \leq g(x, s)(1 + |\xi|)^p, \\ &|F(x, s, \xi) - F(x, s, \eta)| \leq L(1 + |\eta|^{p-1} + |\xi|^{p-1})\, |\xi - \eta| \,, \end{aligned}$$

dove $1 \leq p < +\infty$ e g è una funzione di Carathéodory. Allora il funzionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega F(x, D^{[k-1]} u(x), D^k u(x))\, dx$$

è semicontinuo inferiormente per successioni in $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Usando come strumento fondamentale la semicontinuità inferiore debole per integrali di ordine superiore proviamo l'esistenza di soluzioni a problemi differenziali del seguente tipo

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} F(x, D^{[k-1]} u(x), D^k u(x)) = 0 \quad \text{q.o.} \quad x \in \Omega\,; \\ u \in \phi + W_0^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)\,. \end{cases}$$

Tali problemi sorgono nel Calcolo delle Variazioni quando si ha a che fare con funzioni integrande non quasiconvesse, vedi [5]. Seguendo Dacorogna e Marcellini diremo che (1) è un problema differeziale per una equazione alle derivate di TIPO IMPLICITO. Osserviamo che rispetto alle condizioni al bordo il problema è sovradeterminato.

In (1) F è una funzione assegnata che deve soddisfare certe condizioni di coercività; in particolare le nostre ipotesi elimineranno quelle funzioni F che sono lineari rispetto alle derivate di ordine massimo $D^k u$. Se consideriamo per esempio il caso $k = 4$ e $F = F(D^4 u(x))$, è evidente che non si possono trattare funzioni F lineari; infatti il problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) - 1 = 0 & \text{q.o.} \quad x \in \Omega\,, \\ u \in \phi + W_0^{4,\infty}(\Omega) \end{cases}$$

(qui Δ^2 denota l'operatore bilaplaciano) è sovradeterminato, mentre si mostra, per esempio, che il problema

$$\begin{cases} |\Delta^2 u(x)| - 1 = 0 & \text{q.o.} \quad x \in \Omega\,, \\ u \in \phi + W_0^{4,\infty}(\Omega)\,. \end{cases}$$

ammette infinite soluzioni.

In effetti considereremo solo funzioni F coercive in almeno una direzione di rango-1 (see definition 0.2), come $F(D^4 u(x)) = |\Delta|^2 u(x)$ - 1 dell'esempio precedente (2).

Prima di enunciare il risultato di esistenza che si ottiene per questi problemi dobbiamo dare alcune definizioni

DEFINIZIONE 2. – *Diciamo che $\Lambda \in ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s$ è un tensore di rango-1 se esistono $\mu \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ tali che*

$$\Lambda = \mu v^{\otimes_k}\,.$$

DEFINIZIONE 3. – *Sia $K \subset \mathbb{R}^m \otimes ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s$, diciamo che K è un sottoinsieme convesso di rango-1 se $\cup A, B \in K$, $\forall t \in [0, 1]$, anche $tA + (1-t)B$ è un elemento di K.*

DEFINIZIONE 4. – *Sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m \otimes ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s$, chiamo* INVOLUCRO RANGO-1 CONVESSO *di $\mathcal{A}$ il più piccolo insieme rango-1 convesso che contiene $\mathcal{A}$.*

DEFINIZIONE 5. – *Sia Y uno spazio metrico. Diciamo che una funzione $F : Y \times ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s \to \mathbb{R}$ è coerciva in una direzione di rango-1 Λ se per ogni sottoinsieme limitato B di $Y \times ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s$ esistono m, $q \in \mathbb{R}$, con $m > 0$ tali che*

$$F(y, \xi + t\Lambda) \geq m|t| - q \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall (y, \xi) \in B\,.$$

Un tipico risultato di esistenza che viene provato in questa tesi è il seguente

TEOREMA 2. – *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto Lipschitziano. Sia $F : \Omega \times \ldots \times ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s \to \mathbb{R}$ una funzione continua, quasiconvessa e coerciva in una direzione di rango-1 (vedi la definizione 5) rispetto all'ultima variabile. Sia $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una funzione $C^k(\overline{\Omega})$ tale che*

$$F(x, D^{[k-1]}\phi(x), D^k\phi(x)) \leq 0 \qquad \forall x \in \overline{\Omega}\,.$$

Allora esiste una funzione $u \in \phi + W_0^{k,\infty}(\Omega)$ *tale che*

$$F(x, D^{[k-1]}u(x), D^k u(x)) = 0 \quad q.o. \quad x \in \Omega \, .$$

Un analogo risultato vale anche nel caso in cui si abbia un sistema invece di una sola equazione

TEOREMA 3. – *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *un aperto Lipschitziano. Siano* $F_i^\delta : \overline{\Omega} \times \ldots \times ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$ *funzioni continue, quasiconvesse rispetto all'ultima variabile, continue rispetto al parametro* $\delta \in [0, \delta_0)$, $\delta_0 > 0$. *Inoltre supponiamo che per ogni coppia* $(x, s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \ldots \times ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_{k-1}})_s$

$$Rco\{\xi \in ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s : F_i^\delta(x, s, \xi) = 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, N\} =$$

$$\{\xi \in ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s : F_i^\delta(x, s, \xi) \leq 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, N\}$$

è un sottoinsieme limitato di $((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s$, *e*

$$\{\xi \in ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s : F_i^\delta(x, s, \xi) = 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, N\} \subset$$
$$\{\xi \in ((\mathbb{R}^n)^{\otimes_k})_s : F_i^0(x, s, \xi) < 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, N\} \ \ \forall \delta \in (0, \delta_0) \, .$$

Sia $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* $C^k(\overline{\Omega})$ *(a tratti) tale che*

$$F_i^0(x, D^{[k-1]}\phi(x), D^k\phi(x)) < 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, N \, .$$

Allora esiste $u \in \phi + W_0^{k,\infty}(\Omega)$ *tale che* $F_i^0(x, D^{[k-1]}u(x), D^k u(x)) = 0$ *q.o.* $x \in \Omega$ $\forall i = 1, \ldots, N$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. B. MORREY, *Quasiconvexity and the Lower Semicontinuity of Multiple Integrals*, Pacific J. Math., **2** (1952), 25-53.

[2] N. MEYERS, *Quasiconvexity and Lower Semicontinuity of Multiple Integrals of Any Order*, Trans. Amer. Math. Soc., **119** (1965), 125-149.

[3] E. ACERBI and N. FUSCO, *Semicontinuity problems in the calculus of variations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **86** (1984), 125-145.

[4] P. MARCELLINI, *Approximation of quasiconvex functions, and lower semicontinuity of multiple integrals*, manuscripta math, **51** (1985), 1-28.

[5] B. DACOROGNA and P. MARCELLINI, *Implicit partial differential equations*, Birkhäuser (1999).

Dipartimento di Matematica «Ulisse Dini», Università di Firenze
Viale Morgagni, 67a I-50134 Firenze
e-mail: laura.poggiolini@math.unifi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Paolo Marcellini, Università di Firenze