
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

FRANCESCO MUGELLI

Disuguaglianze di Sobolev nello spazio iperbolico bidimensionale

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 3-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (2000), n.1S, p. 149–152.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_149_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_149_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Disuguaglianze di Sobolev nello spazio iperbolico bidimensionale.

FRANCESCO MUGELLI

Il problema considerato si inquadra nell'ambito più generale delle disuguaglianze di Sobolev su varietà. Sia V è una varietà di dimensione n e sia $\|\cdot\|_p$ la norma in $L^p(V)$; esistono due costanti A e B dipendenti soltanto dalla dimensione n e da p tali che

$$(1) \quad \|u\|_q \leq B \|\nabla u\|_p + A \|u\|_p.$$

Sia $C(n, p)$ l'estremo inferiore delle costanti B per cui esiste una costante A tale che la (1) sia possibile; in [1] si prova che la costante C non dipende dalla curvatura della varietà V e che, nel caso delle varietà a curvatura costante, $A' = A(C(n, p))$ esiste. Per tali varietà vale la disuguaglianza

$$(2) \quad \|u\|_q \leq C(n, p) \|\nabla u\|_p + A' \|u\|_p.$$

Oggetto della tesi è lo studio di alcune disuguaglianze di Sobolev su varietà a curvatura gaussiana costante negativa e la determinazione della costante A' in varie situazioni. Ricordiamo i legami fra le disuguaglianze di Sobolev e la struttura geometrica della varietà su cui sono costruiti gli spazi funzionali: ad esempio per $p = 1$, la disuguaglianza di Sobolev in $\mathbb{R}^n$

$$\|u\|_q \leq C(n, p) \|\nabla u\|_p$$

è equivalente al teorema isoperimetrico di $\mathbb{R}^n$, ed è comunque strettamente legata ad esso per $1 < p < n$.

Oggetto di questa tesi sono alcune disuguaglianze di Sobolev su $\mathbb{R}_+^2$ (cfr. teo. 0.1) dotato della metrica di *Poincaré-Bergman*

$$y^{-2}[(dx)^2 + (dy)^2]$$

– che denoteremo con $\mathbb{H}^2$ – e che costituisce un possibile modello per lo spazio iperbolico bidimensionale.

Nella prima parte della tesi sono discusse le disuguaglianze di Sobolev in $\mathbb{H}^2$ nei casi non critici, vale a dire per $p \neq 2$. Il risultato principale è il

TEOREMA 1. – *Sia $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y): -\infty < x < \infty, 0 < y < \infty\}$, il semipiano euclideo, sia u una funzione a valori reali definita in $\mathbb{R}_+^2$. Supponiamo u regolare a sufficienza (ad esempio lipschitziana) e che tenda a zero abbastanza velocemente (per esempio funzioni con supporto a distanza positiva dall'asse X e limitato). Allora valgono le disuguaglianze seguenti e sono ottimali.*

$$(i) \quad (3) \quad \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u| \frac{dx dy}{y^2} \right\}^2 + 4\pi \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^2 \frac{dx dy}{y^2} \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} y \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \frac{dx dy}{y^2} \right\}^2.$$

(ii) Se $1 < p < 2$ e $q = 2p/(2 - p)$ allora

$$(4) \quad p^{-2} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^p \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/p} + \frac{(4\pi/q)^2 (q/2 - 1)^{2/q}}{\sin(2\pi/q)} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/q} \leq \\ \leq \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/p}.$$

(iii) Se $p > 2$ allora

$$(5) \quad \sup |u| \leq (4\pi)^{-1/p} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p-2}{2(p-1)}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2(p-1)}\right)} \right\}^{1-1/p} \times \\ \times \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{1/p}.$$

(iv) Se $1 \leq p < \infty$ allora

$$(6) \quad \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dx dy}{y^2} \right\}^{2/p} \leq p^p \int_{\mathbb{R}_+^2} y^p (u_x^2 + u_y^2)^{p/2} \frac{dx dy}{y^2}.$$

La dimostrazione del teorema 1 fa uso della teoria dei *riordinamenti* e si basa sulla trasformazione delle disuguaglianze (3)-(6) in problemi variazionali unidimensionali. È qui che entra in gioco la struttura geometrica del semipiano iperbolico visto come varietà riemanniana: il riordinamento ha le proprietà necessarie – in particolare che gli integrali del tipo di Dirichlet decrescano – esso deve essere modellato sui *cerchi geodetici* di $\mathbb{H}^2$; questi ultimi coinvolgono le nozioni di *lunghezza*, *area* e *perimetro* riemanniani e l'uso delle *coordinate polari geodetiche*.

La disuguaglianza isoperimetrica in $\mathbb{H}^2$, che dipende dalla *curvatura* (cfr. [5]), insieme alla formula della coarea di Federer [6] sono gli strumenti principali utilizzati per la dimostrazione di altri risultati strumentali al teorema 0.1.

La seconda parte tratta di un caso limite delle disuguaglianze di Sobolev per $\mathbb{H}^2$:

$$(7) \quad C(2, q, R) \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q y^{-2} dx dy \right\}^{2/q} \leq \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dx dy - R \int_{\mathbb{R}_+^2} u^2 y^{-2} dx dy.$$

In particolare è studiata l'esistenza di un valore massimo per la costante $C(2, q, R)$ per $2 < q < \infty$ e $-\infty < R < 1/4$, definita come l'estremo superiore del rapporto tra il secondo membro e la norma integrale al primo membro della (7), per $2 < q < \infty$ e $-\infty < R < 1/4$.

L'argomento trattato prende spunto da un lavoro, [2], di L. E. Fraenkel riguardante la meccanica dei fluidi; in esso è dimostrata la validità, per $2 \leq q < \infty$ della disuguaglianza

$$(8) \quad \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |\varphi|^q y^{-q/2-2} dx dy \right\}^{1/q} \leq A \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) y^{-1} \right\}^{1/2},$$

dove φ è una funzione a valori reali, regolare, definita su $\mathbb{R}_+^2$ che tenda a zero abbastanza velocemente al tendere di y a zero o al tendere di $x^2 + y^2$ all'infinito.

Fraenkel stesso ha ricollegato un caso particolare della (8) – per $q = 10/3$ – ad una disuguaglianza di Sobolev per lo spazio euclideo $\mathbb{R}^5$ ed ha stabilito il valore ottimale della costante A per questo caso e per $p = 2$ (nel quale la (8) è riconducibile alla disuguaglianza di Hardy). Ha inoltre osservato che in tali casi l'uguaglianza nella (8) è effettivamente raggiunta. Si osservi che per $R = -3/4$ la (7) coincide con la (9) e che $C(2, q, R) = A^{-2}$.

Mediante il cambio di variabile $\varphi(x, y) = \sqrt{y} \cdot u(x, y)$ la (8) assume la forma

$$(9) \quad A^{-2} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q \frac{dxdy}{y^2} \right\}^{2/q} \leq \int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dxdy + \frac{3}{4} \int_{\mathbb{R}_+^2} u^2 \frac{dxdy}{y^2},$$

che è interpretabile come un caso limite della disuguaglianza di Sobolev in $\mathbb{H}^2$ (si vedano le formule (11)).

TEOREMA 2. – *Supponiamo $2 < q < \infty$ e $-\infty < R < 1/4$.*

Sia v una funzione test u tale che $u \neq 0$ e

$$(10) \quad C(2, q, R) = \frac{\int_{\mathbb{R}_+^2} (u_x^2 + u_y^2) dxdy - R \int_{\mathbb{R}_+^2} u^2 y^{-2} dxdy}{\left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^q y^{-2} dxdy \right\}^{2/q}};$$

sia $C(2, q, R)$ e u sono determinate con il procedimento seguente.

Esiste una funzione reale v , definita in $[0, +\infty[$, v , tale che:

(i) v soddisfa la seguente equazione differenziale

$$(11) \quad \frac{d}{ds} (s(s + 4\pi) v'(s)) + Rv(s) + |v(s)|^{q-2} \cdot v(s) = 0$$

per $0 < s < \infty$.

(ii) v soddisfa le seguenti condizioni al contorno

$$(12) \quad -4\pi v'(0) = Rv(0) + |v(0)|^{q-2} \cdot v(0), \quad v(\infty) = 0,$$

e tende a zero all'infinito in modo che

$$(13) \quad \int_0^\infty (sv'(s))^2 ds < \infty.$$

(iii) v è strettamente decrescente.

Sia (a, b) un punto di $\mathbb{H}^2$. Vale la seguente equazione:

$$(15) \quad C(2, q, R) = \left\{ \int_0^\infty |v(s)|^q ds \right\}^{1-2/q},$$

e

$$(16) \quad u(x, y) = v \left(\frac{\pi}{by} ((x-a)^2 + (y-b)^2) \right)$$

per ogni (x, y) in $\mathbb{H}^2$ — in altri termini,

$$(17) \quad u(x, y) = v(s),$$

$$(18) \quad s = \pi[2 \sinh(r/2)]^2 = \text{Area riemanniana di un cerchio geodetico di raggio } r,$$

$$(19) \quad r = \text{distanza riemanniana tra } (a, b) \text{ e } (x, y).$$

Il teorema 2 mostra che il problema può essere ricondotto allo studio dell'esistenza e della unicità delle soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria (11) che soddisfano le condizioni (12); il medesimo teorema fornisce una formula per la costante $C(2, q, R)$.

Per $R = 0$ e $q = 3$ o $q = 4$ è possibile scrivere in forma chiusa la soluzione del problema ai limiti (11)-(12), conseguentemente è possibile determinare esplicitamente i valori di $C(2, 3, 0)$ e di $C(2, 4, 0)$.

Nella parte finale della tesi è descritto un algoritmo per il calcolo numerico della costante $C(2, q, R)$. Il problema ai limiti (11)-(12) è trasformato in uno equivalente mediante un cambio di variabile, ed è quest'ultimo ad essere risolto numericamente utilizzando uno schema alle differenze finite basato sulla formula di quadratura del *midpoint*. L'accuratezza dei risultati ottenuti può essere valutata in base alle considerazioni sull'*errore globale di troncamento*. Il calcolo esplicito di quest'ultimo è possibile solo per $C(2, 3, 0)$, $C(2, 4, 0)$ e per $C(2, 10/3, -3/4)$, e i dati confermano le valutazioni generali. Sono stati infine tracciati i grafici della soluzione del problema (11)-(12) in alcuni casi particolari.

BIBLIOGRAFIA

- [1] T. AUBIN, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geometry, **11** (1976), 573-598.
- [2] L. E. FRAENKEL, *On steady vortex rings with swirl and a Sobolev inequality*, Progress in partial differential equations: calculus of variations, applications, Pitman Research Notes in Math., **266** (1992), 13-26.
- [3] F. MUGELLI and G. TALENTI, *Sobolev inequality in 2-d hyperbolic space*, International Series in Numerical Mathematics, **123** (1997).
- [4] F. MUGELLI and G. TALENTI, *Sobolev inequalities in 2-d hyperbolic space: a borderline case*, Journal of Inequalities and applications, **2** (1998), 195-228.
- [5] R. OSSERMAN, *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc., **84** (1978), 1182-1238.
- [6] W. P. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*, Arch. Rat. Mech. Anal. (1989).

Dipartimento di Matematica «Ulisse Dini», Università di Firenze
 Viale Morgagni, 67a I-50134 Firenze; e-mail: mugelli@math.unifi.it
 Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo X
 Direttore di ricerca: Prof. Giorgio Talenti, Università di Firenze