Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giuseppe Molteni

Funzioni L: teoremi tipo Siegel e teoremi di struttura

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 145–148.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_145_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 145-148

Funzioni L: teoremi tipo Siegel e teoremi di struttura.

GIUSEPPE MOLTENI

La teoria delle funzioni L costituisce uno strumento analitico assai potente per lo studio di vari problemi di natura artimetica, così che tali funzioni sono state associate a vari oggetti sia aritmetici che geometrici: esempi di ciò sono le funzioni L di Hecke ed Artin associate ai campi algebrici, quelle associate alle curve ellittiche e quelle associate alle rappresentazioni automorfe di $\mathrm{GL}(r)$.

È stato osservato che tutte le funzioni L associate ad oggetti nell'ambito della teoria dei numeri condividono alcune proprietà analitiche, precisamente:

* una volta normalizzate, sono possibili per $\Re s > 1$ sia una rappresentazione in serie di Dirichlet

$$L(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

che come prodotto di Eulero

$$L(s) = \prod_p L_p(s),$$

dove p varia sui primi;

* $L(s)$ ha prolungamento analitico su $\mathbb{C}$ come funzione meromorfa con un eventuale polo in $s=1$ come unica singolarità ed inoltre soddisfa una equazione funzionale del tipo:

$$Q^s \gamma(s)\, L(s) = \omega Q^{1-s} \overline{\gamma}(1-s)\, \overline{L}(1-s),$$

dove $\gamma(s)$ indica un prodotto di funzioni gamma, $Q > 0$ e $|\omega| = 1$.

Sono stati dunque compiuti vari tentativi per definire assiomaticamente una classe di funzioni che includa le funzioni L di interesse teorico-numerico: ben noti esempi sono la classe $\mathcal{S}$ introdotta da Selberg [4] (vedasi anche [2]) e la classe $\mathcal{L}$ indagata da Carletti, Monti-Bragadin e Perelli [3].

Sia in $\mathcal{S}$ che in $\mathcal{L}$ si assumono le proprietà suindicate, ma anche altre condizioni sono imposte: in particolare in $\mathcal{S}$ si assume la stima $a_n \ll_\varepsilon n^\varepsilon$ sulla crescita dei coefficienti a_n, stima nota come ipotesi di Ramanujan, ed in $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ si fa l'ulteriore assunzione che il prodotto di Eulero sia di tipo polinomiale, cioè che:

$$L_p(s) = P_p^{-1}(p^{-s})$$

con $P_p(x) \in \mathbb{C}[x]$.

A differenza della forma polinomiale del prodotto di Eulero la quale costituisce una proprietà ben nota per le funzioni L di interesse teorico-numerico, l'ipotesi di Ramanujan è sì congetturata per tali funzioni ma provata solo per classi estremamente ristrette. Ciò fa si che sia particolarmente interessante investigare le proprietà di una nuova classe di funzioni L, la classe $\mathcal{L}^*$, dove la stima di Ramanujan è rilassata ad una forma tanto debole da essere vera incondizionatamente.

I risultati sulla classe $\mathcal{L}$ la cui dimostrazione prescinde dall'assunzione dell'ipotesi di Ramanujan si trasportano facilmente alla nuova classe $\mathcal{L}^*$, tuttavia vi sono fondamentali risultati, quali ad esempio l'upper-bound della forma:

$$L(1) \ll_\varepsilon Q^\varepsilon, \tag{1}$$

la cui classica dimostrazione dipende in modo imprescindibile dalla stima di Ramanujan. Per provare tali risultati anche nell'ambito di $\mathcal{L}^*$ si devono quindi introdurre nuove tecniche. L'«ingrediente» chiave che consente di provare comunque tali risultati è stato individuato nella struttura polinomiale del prodotto di Eulero: essa infatti fa si che i coefficienti a_n soddisfino una legge moltiplicativa grazie alla quale la seguente proposizione è provata

PROPOSIZIONE. – *Siano $s_j(p)$ i coefficienti della componente p-esima dello sviluppo di Eulero per L, sia cioè:*

$$L(s) = \prod_p P_p^{-1}(p^{-s}), \qquad P_p(x) = \sum_{j=0}^{\mathbf{d}} (-1)^j s_j(p)\, x^{\mathbf{d}-j}.$$

Sia inoltre $R(p) := \sqrt{2} \sum_{j=2}^{\mathbf{d}} |s_j(p)|^{1/j}$ e si definisca $R(d)$ la funzione aritmetica completamente moltiplicativa generata da $R(p)$.

Vale la seguente stima:

$$|a_n a_m| \leqslant \sideset{}{^*}\sum_{\substack{d \mid (n,m)^{\mathbf{d}} \\ d \mid nm}} R(d)\, |a_{nm/d}| \qquad \forall n, m \geqslant 1, \tag{2}$$

dove $\sum^*$ indica che la somma è ristretta ai soli divisori square-full, ovvero, $d=1$ e se $p \mid d$ allora $p^2 \mid d$.

Da tale proposizione si deduce in tutta generalità la validità della stima (1) nella classe $\mathcal{L}^*$. A titolo esemplificativo si riporta il seguente risultato:

COROLLARY. – *Sia π una rappresentazione automorfa cuspidale irriducibile e non banale di* GL(r). *Sia Q il suo parametro fondamentale, allora vale la stima:*

$$L(1, \pi) \ll_\varepsilon Q^\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Le informazioni aritmetiche sui coefficienti a_n vengono dedotte da quelle analitiche su $L(s)$ considerando la funzione $\log L(s)$ (attraverso il prodotto di Eulero che viene così trasformato in una serie sui primi). Per tale motivo è importante localizzare le singolarità di tale funzione e quindi gli zeri di $L(s)$. Riguardo a ciò, una regione zero-free di tipo classico è provata anche per la classe $\mathcal{L}^*$ e pure qui come già nel caso originario delle funzioni di Dirichlet, si assiste alla comparsa del «fenomeno zero di Siegel», ovvero all'incapacità di escludere che nella regione zero-free compaia uno zero (unico e semplice, se esiste). Di fatto si congettura che lo zero di Siegel $\tilde{\beta}$ non esista per le funzioni di $\mathcal{L}^*$, come è stato recentemente provato per le forme cuspidali automorfe di $\mathrm{GL}(2)$ e $\mathrm{GL}(3)$ (vedasi in proposito [1]), ma tale congettura sembra estremamente difficile da provare.

Diventa dunque importante provare una regione «Siegel zero-free» quanto più ampia possibile. Per le funzioni di Dirichlet il miglior risultato in questo senso è rappresentato dal famoso teorema di Siegel il quale afferma che:

$$1-\tilde{\beta} \gg_{\varepsilon} q^{-\varepsilon}.$$

Nella tesi si provano teoremi tipo Siegel per la classe $\mathcal{L}^*$. È importante notare che la stima (1) risulta essere un ingrediente fondamentale al fine di provare tali risultati.

Di nuovo a titolo esemplificativo riportiamo il seguente risultato originale:

COROLLARIO. – *Siano π ed π' due rappresentazioni cuspidali automorfe irriducibili di* $\mathrm{GL}(2)$ *e sia χ un carattere di Dirichlet modulo q e primitivo. Allora per q sufficientemente grande valgono le stime*:

$$L_{\chi}(1, \pi \otimes \mathrm{sym}^2 \pi') \gg_{\pi, \pi', \varepsilon} q^{-\varepsilon}$$

$$L_{\chi}(1, \mathrm{sym}^2 \pi \otimes \mathrm{sym}^2 \pi') \gg_{\pi, \varepsilon} q^{-\varepsilon}$$

$$L_{\chi}(1, \mathrm{sym}^3 \pi) \gg_{\pi, \varepsilon} q^{-\varepsilon}$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

Una nuova classe, la classe $\mathcal{C}$, è poi presa in esame. In $\mathcal{C}$ si ipotizza l'esistenza di una equazione funzionale ma di forma che è lasciata imprecisata se non per alcune deboli stime sulla crescita lungo strisce verticali del piano complesso. Si assume inoltre che per tutte le funzioni della classe fare il twist con qualsiasi carattere di Dirichlet primitivo, ovvero considerare la funzione

$$L_{\chi}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, a_n n^{-s} \qquad \chi \text{ carattere di Dirichlet primitivo}$$

produca comunque elementi di $\mathcal{C}$. Infine, si assume la possibilità di uno sviluppo in prodotto di Eulero di tipo polinomiale, così che $\mathcal{C}_{\mathbf{d}}$ indica la sottoclasse di $\mathcal{C}$ degli elementi con $\deg P_p(x) \geqslant \mathbf{d}$ per quasi ogni primo p.

In $\mathcal{C}$ si è provato un fatto interessante: l'esistenza di una funzione $L(s)$ of $\mathcal{C}_{\mathbf{d}}$, per qualche $\mathbf{d} \geqslant 2$, per la quale $L_{\chi}(s)$ risulti intera per ogni carattere primitivo χ costituisce una ostruzione affinché esista una funzione di $\mathcal{C}_1$ con analoga proprietà. Siccome funzioni siffatte esistono effettivamente in $\mathcal{C}_2$ (le funzioni di Hecke cuspidali olomorfe di livello 1 ne sono un esempio), ne segue che:

COROLLARY. – *Ogni elemento di $\mathcal{C}_1$ ha un twist con un polo in $s = 1$.*

Questo risultato si accorda con la congettura che le funzioni L di Dirichlet esauriscano di fatto $\mathcal{C}_1$: una affermazione, questa, che sebbene probabilmente corretta, pare oltre le capacità delle tecniche a disposizione.

Infine, è ben noto che all'interno della classe di Selberg una nozione analitica di grado può essere introdotta; riguardo tale parametro fondamentale si congettura che esso possa assumere solo valori interi. In accordo con tale congettura è stato provato da vari autori che la sotto-classe $\mathcal{S}_d$ costituita dalle funzioni con grado analitico d è vuota per $0 < d < 1$. Nell'ultimo capitolo della tesi si danno due nuove e semplici dimostrazioni di questo risultato.

BIBLIOGRAFIA

[1] BANKS W. D., *Tisted symmetric-square L-functions and the nonexistence of Siegel zeros on $GL(3)$*, Duke Math. J., **87** (1997), 343-353.

[2] KACZOROWSKI J., PERELLI A., *The Selberg class: a survey*, *Number Theory in Progress*, Proc. Number Theory Conf., edito da Györy K. *e al.*, **1** (1999), 953-992.

[3] CARLETTI E., MONTI BRAGADIN G. e PERELLI A., *On general L-functions*, *Acta Arith.*, **LXVI** (1994), 147-179.

[4] SELBERG A., *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Collected Papers, **II** (1991), 47-63. Oppure in Proc. Amalfi Conf. Analytic Number Theory, edito da BOMBIERI E. (1992), 367-385.

Dipartimento di Matematica, Università di Milano
e-mail: molteni@socrates.mat.unimi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Alberto Perelli, Università di Genova