Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Silvia Mataloni

Convergenza e dualità per forme di Dirichlet non-simmetriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 133–136.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_133_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 133-136

Convergenza e dualità per forme di Dirichlet non-simmetriche.

SILVIA MATALONI

1. – Presentazione della teoria.

Prendiamo in considerazione un corpo con struttura interna irregolare fortemente non-omogenea, eventualmente non isotropa. Se si vogliono descrivere gli stati d'equilibrio di un tale corpo ci si può affidare al *principio variazionale* per cui gli stati d'equilibrio sono quelli che rendono minima l'energia. A causa dell'elevata irregolarità del corpo l'usuale descrizione matematica dell'energia può diventare molto complicata e, a volte, impossibile. La teoria delle forme di Dirichlet, iniziata negli anni '50 con i lavori di Beurling e Deny, ci dà una mano in quanto offre un quadro funzionale adatto per la formulazione dei principi variazionali di corpi fortemente irregolari.

Più precisamente una forma bilineare $\tilde{\mathcal{E}}(u, v)$ con dominio $D(\tilde{\mathcal{E}})$ contenuto nello spazio di Hilbert $H = L^2(X, m)$ (con un'opportuna scelta dello spazio di misura (X, m)), simmetrica, semidefinita positiva e chiusa, ossia con $D(\tilde{\mathcal{E}})$ completo rispetto alla norma intrinseca $\|u\|_{\tilde{\mathcal{E}}_1} = (\|u\|^2_{L^2(X, m)} + \tilde{\mathcal{E}}(u, u))^{1/2}$, è detta di Dirichlet se soddisfa la *proprietà di Markovianità*, ossia per ogni $u \in D(\tilde{\mathcal{E}})$ risulta $u^+ \wedge 1 \in D(\tilde{\mathcal{E}})$ e $\tilde{\mathcal{E}}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \tilde{\mathcal{E}}(u, u)$. Per chiarire le idee si può pensare al seguente esempio modello: sia $X = \Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $m = dx$ la misura di Lebesgue. Si consideri la forma

$$\tilde{\mathcal{E}}(u, v) = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx \tag{1}$$

dove $D(\tilde{\mathcal{E}})$ è l'usuale spazio di Sobolev $H_0^1(\Omega)$. La forma è chiusa perché lo spazio di Sobolev è completo rispetto alla norma intrinseca che coincide con l'usuale norma in H_0^1 ed è Markoviana perché, troncando il potenziale u, l'energia $\tilde{\mathcal{E}}(u, u)$ si abbassa. È bene ricordare che ad ogni forma di Dirichlet rimangono associati una famiglia di risolventi contrattivi fortemente continui, una famiglia di semigruppi di contrazioni fortemente continui ed un generatore A, operatore autoaggiunto e definito non-positivo. La classe di tali operatori è ampia e include operatori differenziali con vari tipi di degenerazione come operatori degeneri con peso, operatori subellittici tra cui gli operatori di Hörmander ed operatori definiti su strutture non differenziabili come le strutture frattali. In particolare, il generatore associato alla forma dell'energia (1) è l'operatore di Laplace Δ con dominio $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Prima di proseguire, è bene sottolineare che ad ogni forma di Dirichlet è intimamente connesso un processo di Markov. Questo legame è fondamentale in quanto permette di affrontare lo studio della teoria sia da un punto di vista probabilistico che analitico.

Ci limiteremo ora a considerazioni sulle forme di Dirichlet regolari ossia tali che esista una sottoalgebra di $D(\tilde{\mathcal{E}})$ che prenda il ruolo, in questa teoria variazionale, dell'usuale spazio di funzioni test $C_0^1(\mathbb{R}^n)$. La forma dell'energia (1) è regolare ed è fortemente locale ossia $\tilde{\mathcal{E}}(u, v) = 0$ per ogni $u \in D(\tilde{\mathcal{E}})$ e v costante su un intorno del supp$[u]$. Si consideri la forma di Dirichlet

$$\tilde{\mathcal{E}}(u, v) = \int_\Omega \nabla u \, \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx .$$

Questa forma non è fortemente locale ma è locale, ossia $\tilde{\mathcal{E}}(u, v) = 0$ per ogni $u, v \in D(\tilde{\mathcal{E}})$ con supporti disgiunti. Beurling e Deny dimostrano che ogni forma di Dirichlet regolare $(\mathcal{E}, D(\tilde{\mathcal{E}}))$ può essere espressa come somma di tre parti, una non locale, una locale ed una fortemente locale. Le forme fortemente locali, dette *diffusioni*, sono di grande interesse in quanto per esse sussiste una rappresentazione integrale mediante una forma $\tilde{\alpha}$ bilineare, simmetrica, semidefinita positiva, a valori nelle misure di Radon su X. La misura $\tilde{\alpha}(u, v)$ univocamente associata a $\tilde{\mathcal{E}}$ si chiama *misura dell'energia* e soddisfa molte importanti proprietà funzionali. Di fondamentale importanza è il suo carattere locale: la restrizione della misura $\tilde{\alpha}(u, v)$ a ogni sottinsieme aperto A di X dipende solo dalle restrizioni di u e v ad A.

Vediamo ora un caso in cui la teoria astratta permette di affrontare un problema concreto: il *problema di Dirichlet rilassato*. Nella sua forma più semplice, un problema di Dirichlet rilassato in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ può essere formalmente scritto come segue:

$$-\Delta u + \mu u = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{2}$$

dove Δ è l'operatore di Laplace e μ è una misura di Borel non-negativa che può assumere valori $+\infty$. Con un'opportuna scelta della misura μ, si ottengono problemi di Dirichlet con i buchi, con condizioni al bordo omogenee, o equazioni di Schrödinger stazionarie con potenziale non-negativo eventualmente singolare.

I problemi del tipo (2) nascono naturalmente come *equazioni asintotiche* soddisfatte da limiti u di successioni di soluzioni u_h di problemi di Dirichlet «perturbando» il buco o di equazioni di Schrödinger «perturbando» il potenziale, e sono detti «problemi di Dirichlet rilassati» per sottolineare il fatto che la condizione di Dirichlet omogenea può prendere, al limite per $h \to \infty$, la forma rilassata col termine di «penalizzazione» μu che appare in (2).

2. – Scopi e risultati.

Uno degli obiettivi della tesi è stato quello di affrontare il problema di Dirichlet rilassato nel caso in cui l'operatore che sostituisce il laplaciano in (2) è il generatore di una forma di Dirichlet non-simmetrica di tipo diffusivo. Il primo problema da affrontare è quello di provare l'esistenza di una misura che rappresenta le forme diffusive non-simmetriche e, in particolare, è quello di estendere al caso non-simmetrico la formula di Beurling e Deny.

Per scendere più nel dettaglio diamo alcune definizioni in accordo con il libro di Ma e Röckner [1], che introduce alla teoria delle forme di Dirichlet non-simmetriche.

Data una forma bilineare $(\mathcal{E}, D(\mathcal{E}))$ su $H = L^2(X, m)$ con (X, m) spazio di misura opportuno, definiamo *parte simmetrica* della forma $\mathcal{E}$, la forma $\tilde{\mathcal{E}}(u, v) = \frac{1}{2}(\mathcal{E}(u, v) + \mathcal{E}(v, u))$. Una forma bilineare è detta coerciva chiusa se la sua parte simmetrica $(\tilde{\mathcal{E}}, D(\mathcal{E}))$ è chiusa e soddisfa la *condizione di settore* che esprime la continuità della forma rispetto alla norma intrinseca.

Una forma coerciva chiusa è detta di Dirichlet non-simmetrica se soddisfa una proprietà di Markovianità in ambedue le variabili. Ricordiamo che ad ogni forma di Dirichlet non-simmetrica rimangono associati, oltre al risolvente, al semigruppo ed al generatore, i loro operatori aggiunti detti, rispettivamente, corisolvente, cosemigruppo e cogeneratore. Per fissare le idee si può pensare al seguente esempio modello: sia $X = \Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $m = dx$ la misura di Lebesgue. Sia a_{ij} una matrice non simmetrica di coefficienti limitati e misurabili soddisfacenti la condizione di uniforme ellitticità. La forma

$$\mathcal{E}(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

con $D(\mathcal{E}) = H_0^1(\Omega)$ è una forma di Dirichlet non-simmetrica.

Si prova ([5]) che ogni forma di Dirichlet non-simmetrica regolare può essere espressa come somma di tre parti, una non locale, una locale ed una data dalla semisomma di una parte fortemente locale rispetto alla variabile u e di una parte fortemente locale rispetto alla variabile v. In particolare, se la parte locale e quella non locale si annullano, si mostra che la forma è fortemente locale in entrambe le variabili ed ammette una rappresentazione integrale mediante una forma bilineare α non-simmetrica, semidefinita positiva, a valori nelle misure di Radon su X. Si prova che la misura $\alpha(u, v)$ soddisfa proprietà analoghe a quelle della misura dell'energia grazie alle quali si è potuto affrontare il problema della stabilità delle soluzioni dei problemi di Dirichlet rilassati relativi a forme di Dirichlet non-simmetriche di tipo diffusivo. In particolare, il carattere locale della misura, permette di restringere il dominio della forma ad un aperto $\Omega \subseteq X$, che chiameremo $D_0(\mathcal{E}, \Omega)$.

Introdotta una classe di misure $\mathcal{M}$ opportuna, si dimostra il seguente risultato di compattezza: data una successione $\{\Omega_h\}$ di aperti relativamente compatti contenuti in Ω, esiste una sottosuccessione, che continueremo a chiamare $\{\Omega_h\}$, ed una misura $\mu \in \mathcal{M}$ tale che per ogni $f \in D_0'(\mathcal{E}, \Omega)$, duale di $D_0(\mathcal{E}, \Omega)$, la soluzione $u_h \in D_0(\mathcal{E}, \Omega_h)$ del problema

$$\mathcal{E}(u_h, v) = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in D_0(\mathcal{E}, \Omega) \tag{3}$$

estesa a zero al di fuori di $\Omega \backslash \Omega_h$, converge debolmente in $D_0(\mathcal{E}, \Omega)$ all'unica soluzione $u \in D_0(\mathcal{E}, \Omega) \cap L^2(\Omega, \mu) := V_\mu(\Omega)$ del problema

$$\mathcal{E}(u, v) + \int_{\Omega} uv \, d\mu = \langle f, v \rangle \qquad \forall v \in V_\mu(\Omega) \tag{4}$$

dove $< \cdot, \cdot >$ denota il pairing di dualità tra $D_0'(\mathcal{E}, \Omega)$ e $D_0(\mathcal{E}, \Omega)$.

Tale risultato si ottiene come conseguenza della compattezza della classe $\mathcal{M}$ rispetto ad un'opportuna convergenza di misure.

Un intero capitolo è stato, inoltre, dedicato allo studio di una convergenza per forme non-simmetriche. Più precisamente, si è esteso il concetto di convergenza per le forme simmetriche chiuse introdotto da Mosco. Tale convergenza implica la Γ-convergenza dei funzionali associati alle forme quadratiche ed è equivalente alla convergenza forte in H dei risolventi associati alle forme chiuse. Mosco dimostra anche la compattezza di una particolare classe di forme rispetto a tale convergenza, la classe delle forme *asintoticamente compatte* chiuse.

Si fornisce ([3]) una definizione di convergenza per le forme coercive chiuse e si prova che la successione di forme $\{\mathcal{E}_h\}$ converge ad $\mathcal{E}$ se e solo se le successioni dei risolventi e dei corisolventi associati alle forme $\mathcal{E}_h$ convergono fortemente in H, rispettivamente, al risolvente e al corisolvente associati ad $\mathcal{E}$. Si prova inoltre che la classe delle forme asintoticamente compatte coercive chiuse è compatta rispetto a tale convergenza. Si mostra anche che, se $\{\mathcal{E}_h\}$ è una successione di forme di Dirichlet non simmetriche convergente alla forma $\mathcal{E}$, allora $\mathcal{E}$ è di Dirichlet non simmetrica.

Con tale definizione di convergenza, si è affrontato il problema della stabilità delle soluzioni di disuguaglianze variazionali che coinvolgono forme coercive chiuse. In particolare si mostrano applicazioni nella teoria della *capacità*.

Un intero capitolo è stato dedicato a risultati sulla teoria del potenziale per forme di Dirichlet non-simmetriche. L'estensione della definizione di capacità al caso non simmetrico riprende un'idea introdotta da Stampacchia per operatori del secondo ordine uniformemente ellittici non necessariamente autoaggiunti. In tale contesto fornisce le definizioni di *potenziale capacitario* e *distribuzione capacitaria* come soluzioni di opportune disuguaglianze variazionali. È stato mostrato da Matzeu che la distribuzione capacitaria è soluzione della disuguaglianza variazionale duale (secondo la teoria introdotta da Mosco) a quella che definisce il potenziale. Nella tesi si presentano alcuni risultati analoghi nel contesto delle forme di Dirichlet non-simmetriche ([2]).

BIBLIOGRAFIA

[1] MA Z.M., RÖCKNER M., *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Springer Verlag (1992).

[2] MATALONI S., *Some duality results for the capacity theory related to non-symmetric Dirichlet forms*, Note di Matematica dell'Università di Lecce, **16** (1996), 81-97.

[3] MATALONI S., *On a type of convergence for non-symmetric Dirichlet forms*, Adv. Math. Sci. Appl., **2** (1999).

[4] MATALONI S., TCHOU N. A., *Limits of relaxed Dirichlet problems involving a non-symmetric Dirichlet form*, to appear in Ann. Mat. Pura ed Appl.

[5] MATALONI S., *Representation formulas for non-symmetric Dirichlet forms*, to appear in Jour. for Anal. and Appl.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»
Via della Ricerca Scientifica 00133 Roma; e-mail: mataloni@mat.uniroma2.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma II) - Ciclo X
Direttore di Ricerca: Prof. Michele Matzeu, Università di Roma «Tor Vergata»