Bollettino
Unione Matematica Italiana

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

Lidia Maniccia

# Asintotica spettrale per una classe di operatori ellittici in $\mathbb{R}^n$

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 125–128.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_125_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 125-128

# Asintotica spettrale per una classe di operatori ellittici in $\mathbf{R}^n$.

LIDIA MANICCIA

## 1. – Preliminari.

Argomento della tesi è lo studio dell'asintotica spettrale per una classe di operatori ellittici che, pur agendo su $\mathbf{R}^n$, presentano uno spettro discreto di soli autovalori aventi molteplicità finita. Ciò richiede, si veda ad esempio [2], opportune condizioni di crescita «all'infinito» per i coefficienti.

Il modello per la classe di operatori considerata nella tesi (e ampiamente trattata in [4]) è il seguente:

$$P(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha, \tag{1}$$

con coefficienti ($C^\infty$) che hanno, in coordinate polari $x = \varrho\omega$, $\varrho > 0$, $|\omega| = 1$, uno sviluppo asintotico per $\varrho \to +\infty$, del tipo (per un certo $\mu > 0$)

$$a_\alpha(\varrho\omega) \sim \varrho^\mu [a_\alpha^{(0)}(\omega) + \varrho^{-1} a_\alpha^{(-1)}(\omega) + \cdots] \tag{2}$$

Le condizioni affinché una realizzazione di $P$ in $L^2(\mathbf{R}^n)$ abbia spettro discreto di soli autovalori sono:

$$\begin{cases} \text{(i)}\ p_m(x, \xi) := \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \neq 0 \ \ \forall x \ \text{ e } e\forall \xi \neq 0\,, \\ \text{(ii)}\ p_\infty(\omega, \xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha^{(0)}(\omega)\, \xi^\alpha \neq 0 \ \ \forall \omega \in S^{n-1} \ \text{ e } \ \forall \xi\,, \\ \text{(iii)}\ p_{\natural}(\omega, \xi) := \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha^{(0)}(\omega)\, \xi^\alpha \neq 0 \ \ \forall \omega \in S^{n-1} \ \text{ e } \ \forall \xi \neq 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

La condizione (i) esprime l'ellitticità di $P$ in senso usuale mentre le condizioni (ii) e (iii) esprimono l'«ellitticità globale all'infinito». Nelle ipotesi (3), e per $P = P^* \geq 0$, nella tesi è analizzata la crescita, per $\tau \to +\infty$, della cosidetta «funzione contante» $N(\tau) := \sum_{\lambda_j \leq \tau} 1$ ($\lambda_j$ autovalore di P) seguendo due metodi classici:

(a) studio delle singolarità per $t \to 0^+$ del nucleo dell'operatore $e^{-tP}$ legato all'operatore del «calore» $\dfrac{d}{dt} + P$, argomento della prima parte della tesi;

(b) studio delle singolarità per $Im\, \lambda \to 0^+$ del nucleo dell'operatore risolvente $(P - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \mathbf{C}$, argomento della seconda parte della tesi.

Utilizzando noti risultati Tauberiani, viene poi dedotto il comportamento asintotico di $N(\tau)$.

Il risultato finale è una stima asintotica di $N(\tau)$ che, da una parte ne mostra il diverso andamento a seconda che sia $\mu < m$, $\mu > m$, $\mu = m$, dall'altra individua il coefficiente dominante nello sviluppo di $N(\tau)$ in termini di un «volume» associato a $p_m(x, \xi)$, $p_\infty(\omega, \xi)$, $p_\sharp(\omega, \xi)$ rispettivamente. Fatto, quest'ultimo, che permette di utilizzare il modello su $\mathbf{R}^n$ per trattare (ad esempio) il caso di operatori su varietà $M$ non compatte ottenute da una varietà compatta $\widetilde{M}$ rimuovendo un (numero finito di) disco $D_n$ e sostituendovi un cilindro (cioè, topologicamente, $M = [\widetilde{M} \setminus D_n] \sqcup [S^{n-1} \times [1, +\infty)]$). Su $M$ viene data una metrica Riemanniana $g_M$ che «diverge» polinomialmente all'infinito nel cilindro. Un esempio tipico di operatori riducibili al modello (1) (per $m = 2$) è

$$P = -\Delta_{g_M} + V \tag{4}$$

dove $V$ è un potenziale («smooth») divergente a $+\infty$ all'infinito.

Le due sezioni seguenti presentano in maggiore dettaglio le due parti in cui la tesi si compone e i risultati ivi contenuti.

## 2. – Metodo del calore.

Supponendo valide le ipotesi (3), e quando $P = P^* \geq 0$, viene risolto, modulo operatori a nucleo integrale in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ (operatori «regolarizzanti nella classe»), il problema di Cauchy per l'equazione del calore associata a $P$. Lo studio delle proprietà di tale soluzione $U(t) = \mathrm{Op}\,(u(t, x, \xi))$ mostra in particolare che, per $t > 0$, $U(t)$ è un operatore a traccia per cui vale

$$\mathrm{Tr}\, U(t) = \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} u(t, x, \xi)\, dx\, đ\xi\,. \tag{5}$$

Le informazioni ottenute per $u(t, x, \xi)$ permettono di dedurre da (5) una formula asintotica, per $t \to 0^+$, di Tr $U(t)$. Ciò porta, in virtù dell'uguaglianza

$$\mathrm{Tr}\, U(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau t}\, dN(\tau)\,,$$

al seguente sviluppo asintotico di $N(\tau)$ quando $\tau \to +\infty$ applicando il Teorema

Tauberiano di Karamata ([5]):

$$N(\tau) = \begin{cases} \dfrac{C_\infty}{\Gamma(1+n/\mu)}\tau^{n/\mu} + o(\tau^{n/\mu}) & \text{se } m > \mu \\ \dfrac{C_m}{\Gamma(1+n/m)}\tau^{n/m} + o(\tau^{n/m}) & \text{se } m < \mu \\ \dfrac{C_\natural}{\Gamma(1+n/m)}\tau^{n/m}\cdot\log\tau + o(\tau^{n/m}\cdot\log\tau) & \text{se } m = \mu \,. \end{cases}$$

Dove

$$C_\infty = \frac{\Gamma(n/\mu)}{(2\pi)^n \mu} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{S^{n-1}} p_\infty(\omega, \xi)^{-n/\mu}\, d\omega\, d\xi \tag{6}$$

$$C_m = \frac{\Gamma(n/m)}{(2\pi)^n m} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{S^{n-1}} p_m(x, \theta)^{-n/m}\, d\theta\, dx \tag{7}$$

$$C_\natural = \frac{\Gamma(n/m)}{(2\pi)^n m^2} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} p_\natural(\omega, \theta)^{-n/m}\, d\omega\, d\theta \,. \tag{8}$$

## 3. – Il metodo della risolvente.

Supponendo sempre verificate le ipotesi (3) e $P = P^* \geqslant 0$, si studiano le proprietà della risolvente $G_\lambda = (P - \lambda I)^{-1}$ con $\lambda$ appartenete all'insieme risolvente di $P(\varrho(P))$. Riadattando alla nostra situazione le tecniche utilizzate in [1] si prova che, sotto opportune ipotesi, $G_\lambda$ è un operatore a traccia il cui nucleo integrale, $G_\lambda(x, y)$, soddisfa la relazione:

$$\int_{\mathbf{R}^n} G_\lambda(x, x)\, dx = \sum_i \frac{1}{\lambda - \lambda_i} \qquad \lambda \in \varrho(P),\ \{\lambda_j\} \text{ autovalori di } P\,. \tag{9}$$

Le informazioni sul comportamento asintotico per $|\lambda| \to +\infty$ di $\sum_i 1/(\lambda - \lambda_i)$ sono ottenute studiando il comportamento asintotico dell'integrale nella (8). Lo studio è portato avanti passando per la costruzione della parametrice di $P - \lambda I$ e confrontando $G_\lambda$ con tale parametrice. Un teorema tauberiano di Malliavin ([3]) permette infine di ricavare il comportamento asintotico per $\tau \to +\infty$ della funzione contante $N(\tau)$ dal momento che

$$\sum_i \frac{1}{\lambda - \lambda_i} = \int_0^{+\infty} (\tau - \lambda)^{-1}\, dN(\tau)\,.$$

Il risultato principale di questa parte della tesi, che migliora le stime dei resti ottenute nella sezione precedente, è:

$$N(\tau) = \begin{cases} \dfrac{C_\infty}{\Gamma(1+n/\mu)}\tau^{n/\mu} + O(\tau^{n/\mu}/\log t) & \text{se } m > \mu \\ \dfrac{C_m}{\Gamma(1+n/m)}\tau^{n/m} + O(\tau^{n/m}/\log t) & \text{se } m < \mu \\ \dfrac{C_\natural}{\Gamma(1+n/m)}\tau^{n/m}\cdot\log\tau + O(\tau^{n/m}) & \text{se } m = \mu\,. \end{cases}$$

Dove $C_\infty$, $C_m$, $C_\natural$ sono le costanti definite in (6), (7), (8) rispettivamente.

## BIBLIOGRAFIA


[1] S. Agmon e Y. Kannai, *On the asymptotic behaviour of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators*, Israel J. Math., **5** (1967), 1-30.
[2] L. Hörmander, *On the asymptotic distribution of eigenvalues of p.d.o. in* $\mathbf{R}^n$, *Archiv för Math.,* **17 N3** (1981), 169-223.
[3] P. Malliavin, *Un theoreme tauberien avec reste pour la trasformee de Stieltjes*, Compte Rendus de l'Academie des Sciences, Paris, **255** (1962), 2351-2352.
[4] E. Schrohe, *Spaces of weighted symbols and weighted Sobolev spaces on manifolds*, LNM, **1256** (1987), 360-377.
[5] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations vol. II*, **AMS 116** (1995).



Dipartimento di Matematica, Università di Bologna; e-mail: maniccia@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. C. Parenti, Università di Bologna