Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Claudio Macci

Grandi deviazioni e importance sampling per processi di Poisson Markov modulati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 117–120.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_117_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 117-120

Grandi deviazioni e *importance sampling* per processi di Poisson Markov modulati.

CLAUDIO MACCI

Questa tesi studia problemi inerenti la teoria delle grandi deviazioni (GD) principalmente in riferimento al *Markov modulated Poisson process* (MMPP). La situazione considerata è la seguente: sia (X_t) una catena di Markov irriducibile (a tempo continuo) con spazio degli stati $E = \{1, \ldots, m\}$ ed inoltre sia $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ un vettore positivo; allora (N_t) è un MMPP se $N_0 = 0$ e se, condizionatamente a $X = (X_t)$, (N_t) ha incrementi indipendenti e $N_t - N_s$ (con $t > s$) ha distribuzione di Poisson di parametro $\int_s^t \lambda_{X_u} du$. L'assunzione di irriducibilità per (X_t) garantisce l'esistenza e l'unicità di sua una distribuzione stazionaria $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ e che tutte le quantità asintotiche che considereremo non dipendono dalla distribuzione iniziale di (X_t).

I risultati principali possono essere suddivisi in due parti. Nella prima parte si studiano le GD delle traiettorie

$$\frac{N_{\alpha\cdot}}{\alpha} = \left([0, 1] \ni t \mapsto \frac{N_{\alpha t}}{\alpha}\right)$$

per $\alpha \to \infty$; quindi per un'opportuna funzione $I : D[0, 1] \to [0, \infty]$ semicontinua inferiormente (detta rate function) si ha

$$\liminf_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha} \log P(\frac{N_{\alpha\cdot}}{\alpha} \in A) \geq -\inf_{\phi \in A} I(\phi)$$

per ogni aperto A e

$$\limsup_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha} \log P\left(\frac{N_{\alpha\cdot}}{\alpha} \in C\right) \leq -\inf_{\phi \in C} I(\phi)$$

per ogni chiuso C. Nella seconda parte si utilizza la tecnica dell'*importance sampling* per la stima della probabilità di attraversamento di un livello positivo b (b grande) per il processo $(N_t - ct)_{t \geq 0}$, dove c è una costante maggiore dell'intensità media $\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{i \in E} \lambda_i \mu_i$.

1. – Grandi Deviazioni.

Iniziamo richiamando i risultati noti sulle GD delle leggi empiriche (L_t) della catena modulante (X_t):

$$k \in E \mapsto L_t(k) = \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X_s = k\}} ds \quad (\forall t > 0).$$

Il limite dei logaritmi delle trasformate di Laplace normalizzate è ben definito e si dimostra che vale $L(v)$ (per $v \in \mathbb{R}^m$) dove $L(v)$ è l'autovalore dominante della matrice $P + diag(v)$, con $P = (p_{ij})_{i,j \in E}$ matrice di intensità di (X_t); per il Teorema di Gartner Ellis (vedi [2], pagina 45), la rate function è

$$\nu \in \mathbb{R}^m \mapsto L^*(\nu) = \sup_{v \in \mathbb{R}^m} (\langle v, \nu \rangle - L(v)) .$$

Ora possiamo presentare i risultati di GD ottenuti per il MMPP. Prima di tutto abbiamo le GD di $\frac{N_\alpha}{\alpha}$ per $\alpha \to \infty$ come facile conseguenza del Teorema di Gartner Ellis perchè il limite dei logaritmi delle trasformate di Laplace normalizzate è ben definito ed è

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto \Lambda(\theta) \equiv L((e^\theta - 1)\lambda) ;$$

quindi la rate function è

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \Lambda^*(x) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (\theta x - \Lambda(\theta)) ,$$

ma non si riesce a trovare un'espressione esplicita. Inoltre sia

$$AC_0[0,1] = \{\phi \in AC[0,1] : \phi(0) = 0\} ;$$

allora, si dimostra che valgono le GD delle traiettorie $\left(\frac{N_{\alpha\cdot}}{\alpha}\right)$ per $\alpha \to \infty$ con rate function

$$\phi \in D[0,1] \mapsto I(\phi) = \begin{cases} \int_0^1 \Lambda^*(\dot{\phi}_t)\, dt & \text{per } \phi \in AC_0[0,1] \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per provarlo si è considerato il processo (C_t) che interpola linearmente (N_t) e poi una versione del Teorema di Gartner Ellis a dimensione infinita (vedi [2], pagina 148); tale versione non era nota quando venne dimostrato l'analogo risultato per il processo di Poisson omogeneo (vedi [1]). In ogni modo questa versione del Teorema di Gartner Ellis a dimensione infinita è stata considerata per ottenere le GD di

$$\frac{C_{\alpha\cdot}}{\alpha} = \left([0,1] \ni t \mapsto \frac{C_{\alpha t}}{\alpha}\right)$$

per $\alpha \to \infty$ su $C[0,1]$; successivamente tali GD si estendono facilmente su $D[0,1]$ con il principio di contrazione ed infine le GD di $\left(\frac{N_{\alpha\cdot}}{\alpha}\right)$ per $\alpha \to \infty$ su $D[0,1]$ seguono da quelle di $\left(\frac{C_{\alpha\cdot}}{\alpha}\right)$ con la stessa rate function perchè $\left(\frac{C_{\alpha\cdot}}{\alpha}\right)$ e $\left(\frac{N_{\alpha\cdot}}{\alpha}\right)$ sono esponenzialmente equivalenti per $\alpha \to \infty$ su $D[0,1]$.

Se tutte le componenti del vettore delle intensità modulate $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ sono uguali ad uno stesso valore, (N_t) è un processo di Poisson omogeneo e si trova il risultato già noto in letteratura provato in [1]; in tal caso si ha un'espressione esplicita della rate function.

2. – Importance sampling.

Abbiamo per ipotesi $c > \langle \lambda, \mu \rangle$ e quindi si ha $\lim_{t \to \infty} N_t - ct = -\infty$. Quindi, se poniamo $T_b = \inf\{t \geqslant 0 : N_t - ct \geqslant b\}$, $P(T_b < \infty)$ rappresenta la probabilità che $(N_t - ct)_{t \geqslant 0}$ superi il livello b e si ha $0 < P(T_b < \infty) < 1$ per ogni $b > 0$. La probabilità $P(T_b < \infty)$ è piccola per b grande; si dimostra infatti, in accordo con i risultati più generali in [3], che

$$\lim_{b \to \infty} \frac{1}{b} \log P(T_b < \infty) = -w_c \tag{1}$$

dove w_c è l'unico zero positivo della funzione $\Lambda_c(\theta) \equiv \Lambda(\theta) - c\theta$.

Quindi la stima di $P(T_b < \infty)$ per b grande tramite simulazioni sotto la legge di partenza è onerosa. La tecnica dell'importance sampling cerca di ovviare a questo inconveniente. Essa consiste nel fare simulazioni con una nuova legge in qualche senso asintoticamente efficiente scelta in una classe di ammissibili; più precisamente tale legge è scelta in modo da minimizzare asintoticamente in b la varianza di uno stimatore non distorto ottenuto come media ponderata dei dati ottenuti dalle varie simulazioni. La classe di ammissibili $\mathcal{C}$ è costituita dalle leggi Q tali che: la legge di partenza P è assolutamente continua rispetto a Q su ogni intervallo $[0, t]$ (e indichiamo con $l_t^{P,Q}$ la corrispondente densità); sotto Q (N_t) è ancora un MMPP ma

$$\lim_{t \to \infty} N_t - ct = +\infty. \tag{2}$$

Per $Q \in \mathcal{C}$

$$\hat{r}_Q = \sum_{i=1}^{n} l_{T_b^{(i)}}^{P,Q} 1_{\{T_b^{(i)} < \infty\}}$$

è uno stimatore non distorto di $P(T_b < \infty)$; qui n è il numero delle simulazioni e $T_b^{(1)}, \ldots T_b^{(n)}$ sono i tempi di attraversamento del livello b relativi alle n simulazioni. È importante osservare che la condizione (2) consente di avere un tempo di realizzazione finito per le simulazioni e quindi $\hat{r}_Q = \sum_{i=1}^{n} l_{T_b^{(i)}}^{P,Q}$. La varianza di $\hat{r}_Q$ è

$$\frac{\mathbb{E}_Q[(l_{T_b}^{P,Q})^2] - (P(T_b < \infty))^2}{n};$$

quindi, per il limite (1), si ha

$$\liminf_{b \to \infty} \frac{1}{b} \log \mathbb{E}_Q[(l_{T_b}^{P,Q})^2] \geqslant -2w_c \tag{3}$$

e Q è asintoticamente efficiente nel caso in cui si abbia l'uguaglianza nella (3).

La tecnica per individuare la legge asintoticamente efficiente e la prova della sua unicità sono analoghe a quelle presentate in [4] dove si considera lo stesso tipo di stima per un *Markov additive process* (MAP) a tempo discreto piuttosto generale; del resto nel nostro caso consideriamo un MAP a tempo continuo. In ogni modo la dimostrazione della sua unicità, che rappresenta la parte più difficile da provare, ha qualche variazione che tiene del particolare MAP considerato. La legge asintoticamente efficiente viene individuata in una famiglia di leggi coniugate $(P^\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ ponendo $\theta = w_c$. Questa famiglia è definita come segue: per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, (N_t) è un MMPP il cui vettore delle intensità modulate è $e^\theta \lambda = (e^\theta \lambda_1, \dots, e^\theta \lambda_m)$, mentre la matrice di intensità $(p_{ij}^{(\theta)})_{i,j \in E}$ per (X_t) è tale che

$$i \neq j \Rightarrow p_{ij}^{(\theta)} = p_{ij} e^{\beta_j^\theta - \beta_i^\theta}$$

dove $(\beta_1^\theta, \dots, \beta_m^\theta)$ è un vettore tale che

$$(e^\theta - 1)\lambda_i = \sum_{j \neq i} p_{ij}(1 - e^{\beta_j^\theta - \beta_i^\theta}) + L((e^\theta - 1)\lambda) \qquad (i \in E).$$

Possiamo anche dire che, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, P è assolutamente continua rispetto a P^θ su ogni intervallo $[0, t]$ e la densità corrispondente è

$$l_t^{P, P^\theta} = \exp(-\theta N_t + \Lambda(\theta)\, t) \frac{\exp(\beta_{X_t}^\theta)}{\exp(\beta_{X_0}^\theta)}.$$

L'interesse di questo tipo di stime delle probabilità di attraversamento di un livello è motivato dalle potenziali applicazioni in diversi campi. A tal proposito si dovrebbe stimare $P(T_b < \infty)$ per b fissato ma il problema sarebbe molto più complicato; comunque il procedimento usato si adatta bene al caso in cui il valore b fissato sia grande.

BIBLIOGRAFIA

[1] Borovkov A. A., *Boundary-value Problems for Random Walks and Large Deviations in Function Spaces*, Theory Probab. Appl., **12** (1967), 575-595.

[2] Dembo A. and Zeitouni O., *Large Deviations Techniques and Applications*, Jones and Bartlett, Boston (1992).

[3] Duffield N. G. e O'Connell N., *Large deviations and overflow probabilities for a single server queue, with applications*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **118** (1995), 363-374.

[4] Lehtonen T. e Nyrhinen H., *On Asymptotically Efficient Simulation of Ruin Probabilities in a Markovian Environment*, Scand. Actuarial J. (1992), 60-75.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»
e-mail: macci@mat.uniroma2.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma II) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Paolo Baldi, Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»