Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Marinella Lombardi

Su alcune equazioni differenziali astratte di tipo degenere

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 113–115.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_113_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 113-115

Su alcune equazioni differenziali astratte di tipo degenere.

MARINELLA LOMBARDI

1. – Problemi parabolici semilineari con parte principale degenere.

Nella prima della tesi, viene studiata la regolarità della soluzione mild del problema parabolico semilineare:

$$u_t(t, x) = \mathbf{A}u(t, x) + f(t, x, u(t, x), Du(t, x)) \quad t \in]0, T], \; x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

con la condizione iniziale $u(0, x) = u_0(x)$, associato all'operatore di Kolmogorov-Fokker-Planck:

$$\mathbf{A}u = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}\,\partial_{ij}^2 u + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_j\,\partial_i u = Tr(QD^2u) + \langle Bx, Du \rangle, \qquad x \in \mathbf{R}^n \tag{2}$$

dove $B = [b_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ è una matrice costante non banale e $Q = [q_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ una matrice costante simmetrica tale che:

$$\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}\,\xi_i \xi_j \geqslant 0\,, \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Dunque l'operatore $\mathbf{A}$ presenta una degenerazione nella parte principale ed è a coefficienti non limitati. Per ottenere i risultati, viene fatta l'ipotesi che la matrice B verifichi la condizione del rango di Kalman (nota in teoria del controllo):

$$Rank\,[Q^{1/2}, BQ^{1/2}, \dots, B^{n-1}Q^{1/2}] = n\,.$$

A partire da questa si introduce in $\mathbf{R}^n$ la seguente metrica non euclidea:

$$d(x, y) = \sum_{h=0}^{h} |E_h(x-y)|^{1/2h+1},$$

(che risulta essere equivalente alla abituale distanza euclidea se e solo se $det\,Q > 0$), dove $|\cdot|$ indica l'usuale norma euclidea e le proiezioni ortogonali E_h decompongono lo spazio $\mathbf{R}^n$ nella somma diretta di sottospazi opportuni e mutuamente ortogonali, legati alla condizione di Kalman.

Con un opportuno cambiamento di coordinate in $\mathbf{R}^n$, si considera una base ortogonale $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ costituita dai generatori dei sottospazi $E_h(\mathbf{R}^n)$. Per ogni $h = 0, 1, \dots, k$, si definisce I_h come l'insieme degli indici i tali che i vettori e_i, con $i \in I_h$, generino $E_h(\mathbf{R}^n)$. Dopo tale cambiamento, le derivate di ordine 2, che figurano in (2), risultano essere solo le ∂^2_{ij}, con $i, j \in I_0$, e le derivate di ordine 1 solo le ∂_i, con $i \in I_0$.

Per risolvere (1), si considera il problema astratto nello spazio $X = UCB(\mathbf{R}^n)$ delle funzioni uniformemente continue e limitate su $\mathbf{R}^n$:

$$u'(t) = Au(t) + F(t, u(t)), \qquad t \in]0, T], \tag{3}$$

con la condizione iniziale $u(0) = u_0$, dove l'operatore A è la realizzazione di $\mathbf{A}$ in X. Ora, se u è una soluzione di (3), deve soddisfare la relazione:

$$u(t) = T(t)\, u_0 + \int_0^t T(t-s)\, F(s, u(s))\, ds \qquad t \in [0, T], \tag{4}$$

ottenuta tramite la formula di variazione delle costanti.

Per analizzare le proprietà e la regolarità della soluzione di (3), si utilizza il principio delle contrazioni, la cui applicazione è subordinata alla costruzione, a partire dalla distanza d, di spazi di funzioni hölderiane $\mathcal{C}^{2+\vartheta}_d(\mathbf{R}^n)$, $0 < \vartheta < 1$, alle proprietà del semigruppo $T(t)$ (che non è analitico e non è fortemente continuo) e alle stime a priori sulla sua norma (si veda il lavoro di Lunardi [5]).

Il risultato relativo alla risolubiltà del problema (1) e alla regolarità ottimale di tipo Hölder è contenuto nel lavoro [4], in cui esibisce un esempio, nel quale mostra che scegliendo il dato iniziale nello spazio $C^1_d(\mathbf{R}^n)$, la soluzione non è più continua nell'origine.

2. – Problemi parabolici con degenerazione nel termine di derivata temporale.

La seconda parte della tesi affronta altri problemi parabolici degeneri. Punto di partenza è il lavoro di Favini e Yagi [1], dedicato all'equazione multivoca lineare in uno spazio di Banach complesso X:

$$u'(t) + Au(t) \ni f(t) \qquad 0 < t \leqslant T \tag{5}$$

$$u(0) = u_0,$$

dove $A = LM^{-1}$ è l'operatore lineare multivoco dedotto effettuando il cambiamento di variabile $u(t) = Mv(t)$ nel problema astratto degenere:

$$(Mv(t))' + Lv(t) = f(t) \qquad 0 < t \leqslant T \tag{6}$$

$$\lim_{t \to 0} Mv(t) = u_0,$$

dove $f : [0, T] \to X$ è un'assegnata funzione, M, L sono operatori lineari e chiusi, $D(L) \subseteq D(M)$ e M non è, in generale, invertibile, con inverso limitato in X (questo determina la degenerazione di (6)).

Si studia la risolubilità seguenti inclusioni differenziali semilineari connesse con (5):

$$u'(t) + Au(t) \ni F(t, u(t)) \qquad 0 < t \leqslant T\,, \qquad u(0) = u_0,$$

e

$$u'(t) \in -Au(t) + G(t, u(t)) \qquad 0 < t \leqslant T\,, \qquad u(0) = u_0,$$

nel caso in cui F sia una funzione univalente e G una mappa multivoca, servendosi, nel primo caso, del principio delle contrazioni e nel secondo di un metodo tipo «approssimazioni successive» (generalizzando quello proposto da Frankowska in [2] per un operatore A multivoco, generatore di un semigruppo analitico di operatori lineari limitati univalenti).

Infine, prendendo le mosse dalla monografia di Haraux [3], ha determinato una condizione necessaria e sufficiente in modo che esista la soluzione u dell'inclusione differenziale (5), in uno spazio di Hilbert H, associata a (6), soddisfacente la condizione di periodicità:

$$Mv(0) = Mv(T)$$

nel senso:

$$\lim_{t \to 0^+} \| ML^{-1}(Mv(t) - Mv(T)) \|_H = 0\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Favini, A. Yagi, *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations*, Ann. Mat. pura ed appl. (IV), **CLXIII** (1993), 353-384.

[2] H. Frankowska, *A priori estimates for operational differential inclusions* , J. Diff. Eqns., 84 (1990), 100-128.

[3] A. Haraux, *Non linear evolution equations and global behavior of solutions* , Lectures Notes, 841, Springer-Verlag, 1981.

[4] M. Lombardi, *On a class of semilinear parabolic problems with degenerate linear part*, Dynamic Systems and Applications, 8 (1999), 89-112.

[5] A. Lunardi, *Schauder estimates for a class of degenerate elliptic and parabolic operators with unbounded coefficients in* $\mathbf{R}^n$, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie IV, **XXIV** (1997), 137-164.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna; e-mail: lombardm@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. A. Favini, Università di Bologna