Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Giuseppe Jurman

Algebre di Lie graduate in caratteristica due

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **3-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n.1S, p. 105–108.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_2000_8_3A_1S_105_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2000.

Bollettino U. M. I.
La Matematica nella Società e nella Cultura
Serie VIII, Vol. III-A, Supplemento ad Aprile 2000, 105-108

Algebre di Lie graduate in caratteristica due.

GIUSEPPE JURMAN

Nello studio dei p-gruppi finiti (gruppi di ordine una potenza di un primo p) un ostacolo per teoremi generali di classificazione è il fatto che ce ne sono troppi. I p-gruppi finiti con classe di nilpotenza 1 sono abeliani, quindi di facile comprensione, ma già all'interno della teoria dei p-gruppi di classe di nilpotenza 2 si ritrovano problemi insolubili di algebra lineare, quale quello della forma canonica simultanea di due matrici.

Queste difficoltà hanno condotto a riformulare il problema della classificazione dei p-gruppi finiti in termini completamente diversi. Ci si è resi conto che conviene studiare non i p-gruppi finiti di classe di nilpotenza piccola, ma quelli di classe di nilpotenza grande rispetto al loro ordine. Anzi, ancor meglio è studiare sistemi inversi di p-gruppi finiti di *coclasse* limitata – la coclasse di un gruppo di ordine p^n e classe c è $n - c$. A questo punto ci si ritrova a studiare i pro-p-gruppi infiniti di coclasse finita.

In questo nuovo ambito Leedham-Green [9] e Shalev [12] hanno dimostrato quello che viene considerato il primo teorema generale di struttura della teoria dei p-gruppi: fissato un primo p e un numero r, esiste un numero finito di pro-p-gruppi infiniti di coclasse r e tutti questi gruppi sono risolubili. Va sottolineato come questa teoria abbia consistenti intrecci con quella dei pro-p-gruppi p-adici analitici.

Un procedimento classico, dovuto a Zassenhaus, permette di associare ad un gruppo (residualmente) nilpotente un'algebra di Lie graduata; in generale, i metodi di Lie giocano un ruolo essenziale negli sviluppi sopradescritti ed ha perció senso considerare analoghi problemi per le algebre di Lie: questa considerazione ha dato inizio ad una teoria parallela che solitamente risulta più maneggevole.

Oltre alla nozione di coclasse, possono essere considerate anche altre condizioni di *ristrettezza* più generali, quale ad esempio quella di essere di *larghezza* finita, cioè l'esistenza per il gruppo di una costante che limiti le dimensioni dei fattori della serie centrale discendente. Una misura di ristrettezza più fine è la cosiddetta *obliquità*, introdotta in [10]: i gruppi di obliquità zero sono stati studiati in [2] con il nome di *normalmente costretti.*

Principalmente ci si è interessati agli oggetti più semplici di entrambe le categorie, ovvero i gruppi e le algebre di Lie graduate che sono *thin* o *di classe massimale.*

Un p-gruppo è thin se è normalmente costretto e soddisfa $|G/G_2| = p^2$, mentre è detto di classe massimale se ha classe di nilpotenza c e ordine p^{c+1}.

Un'algebra di Lie $L = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i$ generata da L_1 è detta di classe massimale se $\dim(L_1) = 2$ e $\dim(L_i) = 2$ quando $i \geqslant 2$, mentre è definita thin se non è di classe massimale e soddisfa la seguente *proprietà di ricoprimento*: per ogni $i \geqslant 1$ e per ogni $0 \neq z \in L_i$, si ha che $[zL_1] = L_{i+1}$. Questa proprietà implica che l'algebra sia generata dagli elementi di peso uno e che $\dim(L_i) \leqslant 2$, per ogni $i \geqslant 1$. Se L è thin, una componente omogenea L_1 di peso uno è chiamata *diamante.*
Il problema originale studiato in questo lavoro riguarda una sorta di compatibilità tra i due tipi di algebre di Lie sopra definite ed è formulabile come segue. Se L è thin ed il suo secondo diamante è in classe k, allora $S = L/L^k = L/\bigoplus_{i \geqslant k} L_i$ ha coclasse uno ed è il più grande quoziente di classe massimale di L. Nelle algebre di Lie associate ai gruppi S è sempre metabeliano, mentre ciò può non accadere in generale. In [3] si dimostra che su campi di caratteristica dispari la condizione precedente è ancora valida, mentre nella presente tesi si studia cosa accade in caratteristica due, dove la situazione si presenta non solo più complessa, ma addirittura differente. È differente dal momento che esistono in effetti infinite algebre risolubili di dimensione infinita il cui più grande quoziente di classe massimale è non metabeliano (queste algebre sono comunque classificate e se ne fornisce una costruzione esplicita), mentre risulta più complessa non solo a causa dei problemi computazionali dovuti alla caratteristica, ma anche per il fatto che questo caso richiede una più profonda conoscenza della struttura del quoziente S.

Quest'ultima esigenza ha orientato lo studio verso la ricerca di una classificazione delle algebre di Lie modulari graduate di classe massimale. Parecchi anni fa Vergne aveva dimostrato che ci sono già molte algebre di Lie di classe massimale (cioè di coclasse 1) in caratteristica zero. Invece se si passa alle algebre graduate ce n'è in pratica una sola.

Che succede in caratteristica positiva p? Shalev in [13] ha mostrato che la situazione è peggiore rispetto al caso dei gruppi, costruendo per ogni primo p una famiglia numerabile di algebre di Lie graduate di classe massimale che non sono risolubili, denotate $AFS(a, b, n, p)$. Queste algebre si costruiscono alla Kac-Moody, come twisted loop algebras delle algebre semplici di Albert e Frank ([1]) di dimensione finita, sfruttando fra l'altro il fatto che in caratteristica positiva esistono algebre semplici di dimensione finita con derivazioni non singolari mentre in caratteristica zero l'esistenza di una derivazione non singolare forza l'algebra a essere nilpotente.

Quando nel 1996 Caranti, Mattarei e Newman in [4] svilupparono la teoria delle algebre di Lie modulari graduate di classe massimale, essi introdussero una tecnica chiamata *inflazione* che permette di costruire, per ogni primo p, un'infinità non numerabile di algebre di classe massimale a partire da una data. Benché ciò sembri suggerire che una classificazione completa di queste strutture sia difficile, si dimostra che l'inflazione è in realtà in grado di costruire *tutte* le algebre, partendo da poche famiglie di algebre di base. Nel caso di caratteristica dispari, questa classificazione è descritta in [6] usando risultati ottenuti in [7] e vede come famiglie di base le $AFS(a, b, n, p)$ ed i loro limiti solubili $AFS(a, b, \infty, p)$.

In caratteristica due, esattamente come in precedenza, il risultato che si ottiene non solo richiede un lavoro computazionale maggiore, ma è in effetti diverso, in quanto aggiunge alle due sopra citate una nuova famiglia di algebre di base $B_l(g, h)$, che vengono esplicitamente costruite e di cui viene anche studiata la struttura coomologica.

Queste algebre sono ottenute come twisted loop algebre a partire da certe algebre semplici $B(g, h)$ di dimensione finita, costruite a partire dalle algebre di Zassenhaus come segue:

$$B(g, h) = Z_k \oplus \overline{Z_k}$$

dove $k = 2^{g+h}$, Z_k è l'algebra di Zassenhaus in caratteristica due, $Z_k = \langle e_\alpha \, \alpha \in \mathbf{F}_k^\star \rangle$ e $\overline{Z_k}$ è l'$\mathbf{F}_2$ spazio vettoriale $\overline{Z_k} = \langle a_\alpha \, \alpha \in \mathbf{F}_k^\star \rangle$ ed il prodotto di Lie è definito come

$$[e_\alpha, e_\beta] = (\alpha + \beta) \cdot e_{\alpha + \beta}$$

$$[e_\alpha, a_\beta] = (\alpha + \beta) \cdot a_{\alpha + \beta}$$

$$[a_\alpha, a_\beta] = (\alpha^\eta + \beta^\eta) \cdot e_{\alpha + \beta}$$

con $\eta = 2^g - 1$.

Le algebre $B(g, h)$ possiedono $g + h$ 2-cocicli, a cui si deve aggiungere quello ulteriore derivante dalla successiva operazione di looping per ottenere le $B_l(g, h)$: queste ultime non hanno una presentazione finita, ma si può dimostrare che mediante tale 2-cociclo loop è possibile costruire un'estensione centrale M contenente elementi del secondo centro che è finitamente presentata.

Il risultato principale del lavoro in oggetto può allora essere enunciato come segue:

TEOREMA 1. – *Sia L un'algebra di Lie graduata di classe massimale di dimensione infinita definita sul campo $\mathbf{F}$ di caratteristica 2.*

Allora L è ottenuta

- *o mediante un numero finito (anche zero) di inflazioni a partire da una delle algebre*

$$B_l(g, h) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathbf{F},$$

$$AFS(a, b, n, 2) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathbf{F},$$

$$AFS(a, b, \infty, 2) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathbf{F},$$

- *o mediante un numero infinito di inflazioni.*

Oltre all'identità di Jacobi generalizzata

$$[u[y\underbrace{x\cdots x}_{n}]]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}[u\underbrace{x\cdots x}_{i}\,y\,\underbrace{x\cdots x}_{n-i}]$$

ed al Teorema di Lucas [11] $\binom{a}{b}\equiv\prod_{i=0}^{n}\binom{a_i}{b_i}$ (mod p) (dove gli a_i, b_i sono le cifre p-adiche di a e b), per sviluppare la teoria generale sono stati indispensabili gli esempi computazionali forniti dal software [8] p-Quotient Program, sviluppato presso l'Australian National University di Canberra.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERT A. A. e FRANK M. S., *Simple Lie algebras of characteristic p*, Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Mat., **14** (1954-55), 117-139.

[2] BONMASSAR C. e SCOPPOLA C. M., *Normally constrained p-groups*, Boll. Un. Mat. It. (1997), in corso di pubblicazione.

[3] CARANTI A e JURMAN G., *Quotients of maximal class of thin Lie algebras. The odd characteristic case* (1998), in preparazione.

[4] CARANTI A. e MATTAREI S. e NEWMAN M. F., *Graded Lie algebras of maximal class*, Trans. Amer. Math. Soc., **349** (1997), 4021-4051.

[5] CARANTI A. e MATTAREI S. e NEWMAN M. F. e SCOPPOLA C. M., *Thin groups of prime-power order and thin Lie algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **47** (1996), 279-296.

[6] CARANTI A. e NEWMAN M. F., *Graded Lie algebras of maximal class. II* (1998), in preparazione.

[7] CARRARA C., *(Finite) presentations of loop algebras of Albert-Frank Lie algebras*, Tesi di dottorato, Dipartimento di Matematica, Università di Trento (1998).

[8] HAVAS G., NEWMAN M. F. e O'BRIEN E. A., *ANU p-Quotient Program (version* 1.4), *written in C, available as a share library with GAP an d as part of Magma, or from http://wwwmaths.anu.edu.au/services/ftp.html* (1997).

[9] LEEDHAM-GREEN C. R., *The structure of finite p-groups*, J. London Math. Soc. (2), **50** (1994), 49-67.

[10] LEEDHAM-GREEN C. R., PLESKEN W. e KLAAS G., *Pro-p-groups of finite width*, Lecture Notes in Mathematics, **1674** (1997).

[11] LUCAS È, *Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier*, Bull. Soc. Math. France, **6** (1878), 49-54.

[12] SHALEV A., *The structure of finite p-groups: effective proof of the coclass conjectures*, Invent. Math., **115** (1994), 315-345.

[13] SHALEV A., *Simple Lie algebras and Lie algebras of maximal class*, Arch. Math. (Basel), **63** (1994), 297-301.

Dipartimento di Matematica, Università di Trento; e-mail: jurman@science.unitn.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Trento) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. A. Caranti, Università di Trento