BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

L. SACCHETTI

Logiche modali con la proprietà del punto fisso

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 2-B (1999),
n.2, p. 279–290.*

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2B_2_279_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Logiche modali con la proprietà del punto fisso.

L. SACCHETTI

Abstract. – *We introduce various kinds of fixed-point properties for modal logics, and we classify the most prominent systems according to these. Our goal is to do a first step towards a complete characterization of provability logics of (possibly non standard) derivability predicates for Peano Arithmetic..*

Premessa.

La logica modale della dimostrabilità è, in un senso che vedremo tra breve, la logica dei predicati «standard» di dimostrabilità. Per predicato «standard» di dimostrabilità intendiamo un predicato $\text{Teor}(x)$ che soddisfa le seguenti condizioni di dimostrabilità:

- a) $PA \vdash p$ se e solo se $PA \vdash \text{Teor}“p”$
- b) $PA \vdash \text{Teor}“p \rightarrow q” \rightarrow (\text{Teor}“p” \rightarrow \text{Teor}“q”)$
- c) $PA \vdash \text{Teor}“p” \rightarrow \text{Teor}“\text{Teor}“p””$

(dove “ p ” indica il gödeliano di p).

La logica che ne risulta è la cosiddetta logica di Gödel-Löb, cioè la logica modale i cui assiomi sono:

- i) tutte le tautologie booleane
- ii) $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
- iii) $\Box (\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$

e le cui regole sono:

- i) Modus Ponens: $A \rightarrow B, A/B$
- ii) Necessitazione: $A/\Box A$.

Da $a)$, $b)$, $c)$ segue infatti l'analogo modale della $c)$ cioè $\Box A \rightarrow \Box\Box A$, mentre l'analogo aritmetico della $iii)$ segue dalle $a)$, $b)$, $c)$ tramite il lemma di diagonalizzazione.

In generale, la logica di un predicato di dimostrabilità Teor " p " si definisce così: sia F l'insieme delle funzioni f dall'insieme delle formule modali all'insieme delle formule di PA tali che commutano con i connettivi booleani e che $f(\Box A) = \text{Teor } "f(A)"$. La logica del predicato Teor è l'insieme delle formule modali A tali che per ogni $f \in F$ si abbia $PA \vdash f(A)$.

Nella logica della dimostrabilità si ha una interessante traduzione del Lemma di Diagonalizzazione: non solo ogni formula modale $A(p)$ con p sotto l'azione di $\Box$ ha un punto fisso (che risulta tale solo in virtù degli assiomi e delle regole di inferenza), ma tale punto fisso è unico a meno di dimostrabile equivalenza e può essere calcolato (cfr. Sambin [11]). Si ha quindi che un sistema debole come una logica modale proposizionale decidibile dà informazioni nuove e interessanti su un sistema «forte» come PA .

L'analisi dei fenomeni di incompletezza, e specialmente del secondo teorema di Gödel, ha rivelato la dipendenza di quest'ultimo non solo dall'estensione del predicato di dimostrabilità ma anche dall'intensione; vi sono cioè predicati di dimostrabilità (cfr. ad esempio Feferman [5]) che pur essendo estensionalmente corretti, sfuggono al raggio d'azione del secondo teorema di Gödel. Una analisi di tali predicati è contenuta in Visser [13].

Predicati diversi danno, in generale, luogo a logiche modali diverse. Cosa possono avere in comune queste logiche? È chiaro che un predicato di dimostrabilità corretto dovrà numerare esattamente l'insieme dei teoremi di PA . Un'ulteriore condizione naturale per un predicato di dimostrabilità ragionevole è la formalizzazione della chiusura per modus ponens, cioè: $\vdash \text{Teor } "p \rightarrow q" \rightarrow (\text{Teor } "p" \rightarrow \text{Teor } "q")$. Abbiamo così una logica minimale che ha come assiomi e regole quelle di GL salvo l'assioma di Löb $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

Un altro aspetto molto importante di tali predicati è il fatto che essi non sfuggono al Lemma di Diagonalizzazione. Ne viene che la logica di un predicato di dimostrabilità deve essere compatibile con la esistenza di almeno un punto fisso per ogni formula $A(p)$ con p sotto $\Box$. In altre parole, una logica modale L di un predicato di dimostrabilità deve soddisfare la seguente proprietà: esiste un modello di Kripke $\langle X, R, \Vdash \rangle$ la cui logica è L (cioè $L \vdash A$ se e solo se per ogni $x \in X$ sia $x \Vdash A$) tale che per ogni formula modale $A(p)$ con p sotto $\Box$ esiste una formula D tale che per ogni $x \in X$ sia $x \Vdash D \leftrightarrow A(D)$. Sorge quindi il problema di studiare le logiche modali compatibili con la esistenza del punto fisso in almeno un modello della logica. Ogni logica L associata a un predicato di dimostrabilità

gode ulteriormente della seguente proprietà (detta stabilità rispetto alla proprietà del punto fisso): siano $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ nuove variabili, sia $A_0, \dots, A_n, \dots$ una enumerazione delle formule di L con p sotto $\Box$. Sia L^0 la logica $L + \{A_n(p/q_n) \leftrightarrow q_n \mid n \in \omega\}$ (con assiomi e regole estese al nuovo linguaggio). Si ha facilmente che, se L è la logica di un predicato di dimostrabilità, allora L^0 è una estensione conservativa di L (cioè se A è una formula di L , allora $L^0 \vdash A \Rightarrow L \vdash A$). Ad esempio si può vedere che $K4$ è consistente rispetto alla proprietà del punto fisso, ma non è stabile rispetto a tale proprietà.

La logica modale GL ha però, come abbiamo detto, una proprietà molto più forte: data una formula $A(p)$ con p sotto l'azione di $\Box$ esiste una formula D le cui variabili sono quelle di $A(p)$ meno p , tale che $GL \vdash D \leftrightarrow A(D)$; inoltre D è unico a meno di dimostrabile equivalenza e può essere calcolato esplicitamente. In altre parole, l'unico punto fisso è tale solo in base alla logica, e la logica stessa permette di calcolarlo. Una logica con questa proprietà verrà detta una logica con la proprietà del punto fisso esplicito (un indebolimento della condizione consiste nel richiedere la proprietà del punto fisso solo per formule con una sola variabile).

Il presente lavoro si colloca nell'ambito di una ricerca più generale nel campo della Logica della Dimostrabilità, cioè quello di classificare tutte le possibili logiche modali che sono logiche della dimostrabilità di un qualche predicato di dimostrabilità e isolare fra queste quelle che soddisfano la proprietà del punto fisso esplicito. Finora, ben poco è stato fatto in tale direzione; in [13], Visser dà solo una serie di esempi di logiche di questo tipo. Nel presente lavoro affrontiamo la parte puramente modale del problema, concentrandoci sull'aspetto più interessante delle logiche della dimostrabilità: l'esistenza del punto fisso. I risultati ottenuti non risolvono il problema, ma, a nostro avviso, costituiscono un apprezzabile passo in avanti.

Un problema interessante, rimasto purtroppo insoluto, è quello di caratterizzare GL attraverso la proprietà del punto fisso esplicito e altre proprietà naturali come la proprietà del modello finito, la proprietà della disgiunzione, etc. Ad esempio, si può formulare la seguente congettura: se L ha la proprietà del punto fisso esplicito, se L ha la proprietà della disgiunzione forte (cioè $L \vdash \Box A \vee \Box B \Rightarrow L \vdash A \vee L \vdash B$) e se ha la proprietà del modello finito, allora $L \supseteq GL$. Ci proponiamo di ritornare su questo problema in un lavoro futuro.

Nel paragrafo 1 vengono riportate alcune definizioni preliminari e si introducono le varie definizioni di proprietà del punto fisso.

Nel paragrafo 2 viene trattata la consistenza con la proprietà del punto fisso nelle sue varie forme. Si vedrà quali condizioni sintattiche una logica deve soddisfare per essere consistente con la proprietà del punto fisso. Verrà poi data una caratterizzazione, in termini di inclusione in uno dei due atomi del reticolo delle logiche modali, delle logiche consistenti con la proprietà del punto fisso esplicito.

Nel paragrafo 3 viene studiata la proprietà del punto fisso (esplicito e non

esplicito). In particolare, si dimostrerà che esistono logiche aventi la proprietà del punto fisso esplicito che non estendono GL .

1. – Preliminari.

DEFINIZIONE 1.1. – La logica modale K ha come schemi di assiomi:

A1) tutte le tautologie booleane,

A2) $\Box A \wedge \Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box B$

e come regole di inferenza:

R1) Modus Ponens: $A \rightarrow B, A/B$,

R2) Necessitazione: $A/\Box A$.

DEFINIZIONE 1.2. – Una struttura di Kripke è una coppia $\langle X, R \rangle$, in cui X è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti nodi e R è una relazione binaria su X .

DEFINIZIONE 1.3. – Un modello di Kripke è una terna $\langle X, R, \Vdash \rangle$ dove $\langle X, R \rangle$ è una struttura di Kripke e $\Vdash$ è una relazione di soddisfacibilità tra nodi e formule modali che soddisfa le seguenti condizioni:

i), ii) $\alpha \Vdash \top$ e non $\alpha \Vdash \perp$,

iii) $\alpha \Vdash \neg A$ se e solo se non $\alpha \Vdash A$,

iv), v), vi) $\alpha \Vdash A \bullet B$ se e solo se $(\alpha \Vdash A) \bullet (\alpha \Vdash B)$, per $\bullet \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,

vii) $\alpha \Vdash \Box A$ se e solo se, per ogni $\beta \in X$ tale che $\alpha R \beta$, si ha $\beta \Vdash A$.

DEFINIZIONE 1.4. – Sia $X = \langle X, R, \Vdash \rangle$ un modello di Kripke. Una formula A è valida in X ($X \models_2 A$) se e solo se, per ogni $\alpha \in X$, si ha $\alpha \Vdash A$. Un insieme di formule Γ è valido in X ($X \models_2 \Gamma$) se e solo se ogni formula $A \in \Gamma$ è valida in X .

DEFINIZIONE 1.5. – Una formula A è valida in una struttura $\langle X, R \rangle$ se A è valida in ogni modello $\langle X, R, \Vdash \rangle$ basato sulla struttura. Un insieme di formule Γ è valido in una data struttura se ogni formula di Γ è valida nella struttura.

Nel seguito ci limiteremo a logiche modali che sono estensioni, attraverso assiomi, della logica modale di base K . Gli schemi di assiomi più utilizzati sono:

$D: \Box P \rightarrow \Diamond P$,

$T: \Box P \rightarrow P$,

$4: \Box P \rightarrow \Box \Box P$,

$Tr: \Box P \leftrightarrow P$,

$V: \Box P(\Box \perp)$,

$W: \Box(\Box P \rightarrow P) \rightarrow \Box P$,

$H: \Box(\Box P \leftrightarrow P) \rightarrow \Box P$

(dove $\diamond P \equiv \neg \Box \neg P$). Salvo avviso contrario una logica modale sarà indicata elencando i simboli dei suoi assiomi (ad esempio $K4$ avrà come assiomi quelli di K più 4), con l'eccezione di GL , che indicherà la logica $K4W$.

Nell'introduzione abbiamo messo in evidenza le possibili connessioni delle logiche della dimostrabilità dei vari predicati di dimostrabilità con diverse proprietà del punto fisso. Elenchiamo qui una serie di versioni più o meno forti di tale proprietà.

DEFINIZIONE 1.6. – Una logica L ha la proprietà del punto fisso esplicito se, per ogni formula $A(p)$ con p sotto l'azione di $\Box$, esiste una formula D tale che:

- i) $L \vdash D \leftrightarrow A(D)$,
- ii) D contenga come variabili solo le variabili di $A(p)$ eccetto p .

DEFINIZIONE 1.7. – L ha la proprietà del punto fisso non esplicito se in ogni modello $\mathcal{M}$ di L ogni formula $A(p)$ con p sotto l'azione di $\Box$ ha punto fisso (cioè per ogni modello $\mathcal{M}$ esiste una formula D tale che $\mathcal{M} \models_2 D \leftrightarrow A(D)$).

DEFINIZIONE 1.8. – Una logica L si dice consistente con la proprietà del punto fisso se esiste un modello $\mathcal{M}$ di L tale che in esso ogni formula $A(p)$ con p sotto l'azione di $\Box$ abbia punto fisso (cioè, esiste una formula D tale che $\mathcal{M} \models_2 D \leftrightarrow A(D)$).

DEFINIZIONE 1.9. – Sia L una logica. Sia $A_1(p), A_2(p), \dots, A_n(p), \dots$ una enumerazione di tutte le formule modali con p sotto l'azione di $\Box$, e sia $p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*, \dots$ la sequenza delle variabili di A_i diverse da p . Si dice che L è consistente con la proprietà del punto fisso esplicito se esiste una sequenza di formule $D_1(p_1^*), D_2(p_2^*), \dots, D_n(p_n^*), \dots$ tale che $L + \{A_n(D_n(p_n^*)) \leftrightarrow D_n(p_n^*) \mid n = 1, 2, \dots\}$ è consistente. In altre parole, L è consistente con la proprietà del punto fisso esplicito se almeno una sua estensione consistente (non necessariamente chiusa per sostituzione) ha la proprietà del punto fisso esplicito.

DEFINIZIONE 1.10. – Sia L una logica. Sia L' la logica ottenuta estendendo il linguaggio di L con nuove variabili $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ ed estendendo gli assiomi e le regole di inferenza di L al nuovo linguaggio.

Sia $A_1(p_1), A_2(p_2), \dots$ una enumerazione di tutte le formule di L con una variabile sotto l'azione di $\Box$.

Sia $L^0 \equiv L' + A_1(q_1) \leftrightarrow q_1 + \dots + A_n(q_n) \leftrightarrow q_n + \dots$ e le cui regole sono $R1$ e $R2$.

L si dice stabile rispetto alla proprietà del punto fisso se L^0 è conservativa su L , cioè se per ogni formula A di L si ha: $L^0 \vdash A$ se e solo se $L \vdash A$.

2. – Consistenza con la proprietà del punto fisso.

TEOREMA 2.1. – i) *Se L è consistente con la proprietà del punto fisso allora, per ogni formula $A(p)$ con p sotto $\square$ tale che $L \vdash A(\top), A(p) \rightarrow p$ non può essere un teorema di L .*

ii) *Se L è consistente con la proprietà del punto fisso allora, per ogni formula $A(p)$ con p sotto $\square$ tale che $L \vdash \neg A(\perp), p \rightarrow A(p)$ non può essere un teorema di L .*

DIMOSTRAZIONE. – i) Per assurdo: sia $\mathfrak{M} = \langle X, R, \Vdash \rangle$ un modello di L tale che $\mathfrak{M} \models_2 \neg A(q) \leftrightarrow q$. Perciò $\mathfrak{M} \models_2 \neg A(q) \leftrightarrow q$ e $\mathfrak{M} \models_2 A(q) \rightarrow q$ dunque $\mathfrak{M} \models_2 q$. Quindi $\mathfrak{M} \models_2 q \leftrightarrow \top$. Si ha perciò che $\mathfrak{M} \models_2 A(q) \leftrightarrow A(\top)$ e quindi, poiché $L \vdash A(\top)$, vale $\mathfrak{M} \models_2 A(q)$. Si ha perciò $\mathfrak{M} \models_2 \neg q$, assurdo.

ii) segue da i) considerando la formula $\neg A(\neg p)$.

COROLLARIO 2.2. – *Nessuna estensione di KT è consistente con la proprietà del punto fisso.*

DIMOSTRAZIONE. – Dal teorema precedente, prendendo $A(p) \equiv \square p$.

TEOREMA 2.3. – i) *Per ogni $n \geq 1$, $K4 + \neg \square^n \perp$ non è consistente con la proprietà del punto fisso.*

ii) *$K + \neg \square \perp$ è consistente con la proprietà del punto fisso.*

DIMOSTRAZIONE. – i) Da $K4 +$ proprietà del punto fisso si deduce l'assioma di Löb $\square(\square p \rightarrow p) \rightarrow \square p$. Da $\neg \square^n \perp$ si deduce poi successivamente $\square \neg \square^n \perp$, $\square \perp$ (assioma di Löb), $\square^n \perp$ (R2) e infine $\perp$.

ii) Sia $\langle N, R \rangle$ la struttura in cui l'insieme dei nodi è l'insieme dei numeri naturali e xRy se e solo se $x = y + 1$. R è inversamente ben fondata. Poniamo, per ogni $X \subseteq N$, $\tau_R(X) = \{x \mid \text{per ogni } y (xRy \rightarrow y \in X)\}$. Sia ora $p(v, y_1, y_2, \dots, y_n)$ un polinomio con v sotto l'azione di τ , e siano $Y_1, \dots, Y_n \subseteq N$. Essendo, come detto, v sotto l'azione di τ per ogni $n \in N$, $X \subseteq N$, l'appartenenza o meno di n a $p(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ dipende solo da $X \cap \{0, \dots, n-1\}$, cioè se $X \cap \{0, \dots, n-1\} = Z \cap \{0, \dots, n-1\}$ allora $n \in p(X, Y_1, \dots, Y_n)$ sse $n \in p(Z, Y_1, \dots, Y_n)$. Definiamo allora $D_p = \bigcup_k D_k$ ove: $D_0 = \emptyset$ se $0 \notin p(\emptyset, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$, $D_0 = \{0\}$ altrimenti; $D_{k+1} = D_k$ se $n+1 \notin p(D_k, Y_1, \dots, Y_n)$, $D_{k+1} = D_k \cup \{k+1\}$ altrimenti. È facile vedere che $D_p = p(D_p, Y_1, \dots, Y_n)$. Consideriamo ora l'algebra $\mathcal{O} = \langle \wp(N), \cap, \cup, c, \emptyset, N, \tau_R \rangle$ (ove c indica l'operazione di complementazione). Definiamo ora per ogni $Y, Z \in \wp(N)$ $Y \sim Z$ se e solo se $(Y - Z) \cup (Z - Y)$ è finito. È presto visto che $\sim$ è una congruenza di $\mathcal{O}$. Sia $\mathcal{B}$ l'algebra quoziente. È chiaro che $\mathcal{B}$ mantiene le proprietà equazionali di $\mathcal{O}$, e quindi ogni polinomio $p(x)$ con x sotto l'azione di τ ha punto fisso in $\mathcal{B}$. Inoltre l'equazione

$\tau(0) = 0$ è soddisfatta in $\mathcal{B}$, poiché se $X \subseteq N$ è un insieme finito, $\tau_R(X)$ è finito. È poi facile, utilizzando la dualità di Halmos (cfr. Halmos [6]), ottenere da $\mathcal{B}$ un modello di $K + \neg \Box \perp$ in cui ogni formula $A(p)$ con p sotto $\Box$ ha punto fisso.

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione delle logiche consistenti con la proprietà del punto fisso esplicito.

TEOREMA 2.4. – *Una logica modale L è consistente con la proprietà del punto fisso esplicito se e solo se $L \subseteq K + \Box \perp$.*

DIMOSTRAZIONE. – $\Rightarrow$: Sia L' una estensione consistente di L con la proprietà del punto fisso esplicito. Evidentemente $L' \not\subseteq KTr$ poiché in KTr la formula $\neg \Box p$ non ha punto fisso. Quindi $L' \subseteq K + \Box \perp$ e $L \subseteq K + \Box \perp$.

$\Leftarrow$: Se $L \subseteq K + \Box \perp$, allora $K + \Box \perp$ è una estensione consistente di L con la proprietà del punto fisso esplicito.

La stabilità rispetto alla proprietà del punto fisso è invece caratterizzata dalla

PROPOSIZIONE 2.5. – *L è stabile rispetto alla proprietà del punto fisso se e solo se è chiuso rispetto alla regola:*

$$\vdash \bigwedge_{i=1, \dots, k} ((A_i(q_i) \leftrightarrow q_i) \wedge \Box(A_i(q_i) \leftrightarrow q_i) \wedge \dots \wedge \Box^n(A_i(q_i) \leftrightarrow q_i)) \rightarrow B / \vdash B$$

dove: n, k sono numeri naturali arbitrari, q_i non ha occorrenze in B , q_i compare solo in $A_i(q_i)$ e non in $A_j(q_j)$ con $i \neq j$.

DIMOSTRAZIONE. – Un facile esercizio.

Si ha anche la seguente caratterizzazione algebrica:

PROPOSIZIONE 2.6. – *L è stabile rispetto alla proprietà del punto fisso se e solo se esiste un'algebra $\mathcal{A}$ generica per la varietà corrispondente a L , tale che in $\mathcal{A}$ ogni polinomio con una variabile sotto l'azione di τ abbia punto fisso.*

DIMOSTRAZIONE. – $\Rightarrow$: Sia $\mathcal{A}$ l'algebra di Lindenbaum di L^0 . Poiché L^0 è conservativa su L , $\mathcal{A}$ è generica per la varietà corrispondente a L . Inoltre in $\mathcal{A}$ ogni polinomio con una variabile sotto l'azione di τ ha punto fisso.

$\Leftarrow$: Sia $\mathcal{A}$ generica per la varietà corrispondente a L , tale che in $\mathcal{A}$ ogni polinomio con una variabile sotto τ abbia punto fisso. Per il teorema di Löwenheim-Skolem, possiamo supporre $|\mathcal{A}| \leq \aleph_0$. Definiamo interpretazione di L in $\mathcal{A}$ una mappa f dalle formule di L in $\mathcal{A}$ tale che:

- i) $f(\perp) = 0, f(\top) = 1,$
- ii) $f(\neg A) = \nu f(A)$ (ove ν indica l'operazione di complementazione),
- iii) $f(\Box A) = \tau f(A),$

iv) $f(A * B) = f(A) * f(B)$ per ogni connettivo binario $*$.

Poiché $\mathcal{C}$ è generica per la varietà corrispondente a L , si ha che $L \vdash A$ se e solo se $f(A) = 1$ per ogni interpretazione f di L in $\mathcal{C}$.

Supponiamo che $L \vdash [q \leftrightarrow A(q) \wedge \dots \wedge \Box^n(A(q) \leftrightarrow q)] \rightarrow B$, con q sotto $\Box$ in $A(q)$ e q non in B .

Sia f un'interpretazione arbitraria. Poiché $\mathcal{C}$ ha la proprietà del punto fisso, esiste una interpretazione f' che differisce da f al più su q tale che $f'(A(q)) = f'(q)$. Si avrà: $f'(B) = 1$. Poiché q non occorre in B , $f(B) = f'(B) = 1$. Per la arbitrarietà di f si ha $L \vdash B$.

Nel paragrafo 3 vedremo che, per ogni $n > 0$, $K + \Box^n \perp$, ha la proprietà del punto fisso esplicito. Questo consente di dimostrare il seguente

THEOREMA 2.7. – K è stabile rispetto alla proprietà del punto fisso.

DIMOSTRAZIONE. – Basta dimostrare che se $K \not\vdash B$ allora $K^0 \not\vdash B$. Se $K \not\vdash B$ esiste un modello finito e inversamente ben fondato $\mathfrak{M}$ tale che $\mathfrak{M} \models_2 K$, $\mathfrak{M} \not\models_2 B$. Evidentemente per qualche n , $\mathfrak{M} \models_2 \Box^n \perp$, onde $\mathfrak{M} \models_2 K + \Box^n \perp$. Poiché $K + \Box^n \perp$ ha la proprietà del punto fisso esplicito, per ogni formula $A_i(p)$ esiste D_i tale che $\mathfrak{M} \models_2 A_i(D_i) \leftrightarrow D_i$. Definendo $x \Vdash' (q_n)$ se $x \Vdash D_i$, si estende $\mathfrak{M}$ a un modello $\mathfrak{M}'$ tale che $\mathfrak{M}' \models_2 K^0$, $\mathfrak{M}' \not\models_2 B$. Quindi $K^0 \not\vdash B$.

È facile dimostrare che: i) Se L ha la proprietà del punto fisso esplicito, allora L è stabile rispetto alla proprietà del punto fisso. ii) Se L è stabile rispetto alla proprietà del punto fisso, allora L è consistente con la proprietà del punto fisso (altrimenti $L^0 \vdash \perp$, $L \vdash \perp$). Nessuna delle i), ii) può essere invertita. Infatti per il teorema 2.7 K è stabile rispetto alla proprietà del punto fisso ma non gode di tale proprietà e $K4$ è consistente con la proprietà del punto fisso (essendo sottoteoria di GL) ma non è stabile rispetto a tale proprietà (in quanto $K4^0 \vdash GL$ (cfr. Magari [8])).

3. – Logiche aventi la proprietà del punto fisso.

Ovviamente ogni estensione di GL ha la proprietà del punto fisso esplicito. Siamo interessati alle logiche con la proprietà del punto fisso esplicito che non sono estensioni di GL . Daremo due esempi. Per il primo (la logica di Boolos KH) possiamo dimostrare la proprietà del punto fisso esplicito solo per le formule in una variabile. Per il secondo ($K + \Box^n \perp$, n arbitrario) dimostreremo invece la proprietà del punto fisso esplicito per formule qualsiasi. È curioso notare che KH non ha la proprietà del modello finito, mentre $K + \Box^n \perp$ non ha la proprietà della disgiunzione forte. Resta per ora la congettura che una logica modale con la proprietà del punto fisso esplicito, con la proprietà della disgiunzione forte e con la proprietà del modello finito sia una estensione di GL .

PROPOSIZIONE 3.1. – *Limitatamente alle formule con una variabile, KH ha la proprietà del punto fisso esplicito.*

DIMOSTRAZIONE. – Se B è priva di variabili vale: $GL \vdash B$ se e solo se $KH \vdash B$ (cfr. Boolos [4] e Magari [9]). Dunque per ogni formula $A(p)$ con p sotto l'azione di $\square$, esiste una formula D chiusa tale che $KH \vdash D \leftrightarrow A(D)$.

Poiché Magari dimostra in [9] che KH è strettamente più debole di GL , KH potrebbe, a priori, non avere la proprietà del punto fisso per formule qualunque. La seguente proposizione prova comunque che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la logica $K + \square^n \perp$ (che, per $n > 2$, non estende GL) ha la proprietà del punto fisso esplicito.

PROPOSIZIONE 3.2. – *Per ogni $n > 0$, $K + \square^n \perp$ ha la proprietà del punto fisso esplicito.*

DIMOSTRAZIONE. – Da Bellissima [1] segue che, per ogni $h \in \mathbb{N}$, esiste un modello h -canonico $\mathfrak{M}$ di K in cui la relazione è inversamente ben fondata, e tale che, per ogni mondo x , esiste una formula Φ_x in $p_0, \dots, p_h$, tale che $x \Vdash \Phi_x$ e, se $x \neq y$, allora $y \Vdash \neg \Phi_x$. Definiamo, per ogni nodo y , un numero ordinale $liv y$, ponendo $liv y = \sup \{liv z + 1 \mid yRz\}$. Si vede facilmente che la definizione è ben posta. Inoltre l'insieme dei nodi di livello $\leq n$ di tale modello è finito. Quindi per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $n > 0$ $K + \square^n \perp$ ha un modello h -canonico finito e inversamente ben fondato. Ovviamente, se $\mathfrak{M}_h$ è il modello h -canonico di $K + \square^n \perp$ e se A è una formula in $p_0, \dots, p_h$, si ha: $\mathfrak{M}_h \models_2 A$ se e solo se $K + \square^n \perp \vdash A$. Sia ora $A(p, p_0, \dots, p_h)$ una formula con p sotto $\square$ e sia $\mathfrak{M}_h$ il modello h -canonico per $K + \square^n \perp$. Per quanto dimostreremo nel teorema 3.7, possiamo estendere il forcing a p in modo da ottenere un modello $\mathfrak{M}'_h$ in cui sono forzate le stesse formule in $p_0, \dots, p_h$ e tale che $\mathfrak{M}'_h \models_2 p \leftrightarrow A(p, p_0, \dots, p_h)$. Sia $Y = \{x \in \mathfrak{M}'_h \mid x \Vdash p\}$ e sia $D \equiv \bigvee_{x \in Y} \Phi_x$.

Si ha: $\mathfrak{M}_h \models_2 D \leftrightarrow A(D, p_0, \dots, p_h)$, e quindi $K + \square^n \perp \vdash D \leftrightarrow A(D, p_0, \dots, p_h)$. Dunque $K + \square^n \perp$ ha la proprietà del punto fisso esplicito.

Vediamo ora alcuni risultati riguardanti la proprietà del punto fisso non esplicito.

TEOREMA 3.3. – *Ogni logica con la proprietà del punto fisso può essere invalidata in ogni struttura $\langle X, R \rangle$ in cui esiste un ciclo del tipo $\alpha_1 R \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} R \alpha_n R \alpha_1$ (in particolare, in ogni struttura contenente un nodo riflessivo).*

DIMOSTRAZIONE. – Consideriamo la formula $A(p) \equiv \neg \square^n p \vee q$. Costruiamo un modello su $\langle X, R \rangle$ in cui $A(p)$ non ha punto fisso. Sia $\alpha_1 \Vdash \neg q$, $\alpha_i \Vdash q$ per

$1 < i \leq n$, definiamo poi $\beta \Vdash q$ per ogni $\beta \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Si vede facilmente che in tale modello $A(p)$ non ammette punto fisso.

COROLLARIO 3.4. – *Se L ha la proprietà del punto fisso e la proprietà del modello finito, allora L è completa rispetto a una classe di strutture inversamente ben fondate.*

DIMOSTRAZIONE. – Segue dal fatto che ogni modello finito e privo di cicli è inversamente ben fondato.

TEOREMA 3.5. – i) *Sia $\mathfrak{M} = \langle X, R, \Vdash \rangle$ un modello finito di una logica L tale che per ogni $Y \subseteq X$ esista una formula A_Y tale che, per ogni $x \in X$, $x \Vdash A_Y$ se e solo se $x \in Y$. Supponiamo che in tale modello esista un ciclo del tipo $\alpha_1 R \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} R \alpha_n R \alpha_1$. Allora esiste una formula che non ammette punto fisso in $\mathfrak{M}$.*

ii) *Sia $\mathfrak{M} = \langle X, R, \Vdash \rangle$ un modello qualsiasi di una logica L tale che esista un ciclo $\alpha_1 R \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} R \alpha_n R \alpha_1$ in cui α_i è in relazione solo con α_{i+1} . Allora esiste una formula che non ammette punto fisso in $\mathfrak{M}$.*

DIMOSTRAZIONE. – i) Siano $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ i nodi non appartenenti a $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ e sia $I = \{1, 2, \dots, m\}$.

Sia $A(p) \equiv \neg \Box^m p \bigvee_{i \in I} \phi_{\beta_i}$ dove:

- 1) p non compare in nessuna delle ϕ_{β_i} ,
- 2) ϕ_{β_i} indica una formula che vale esattamente in β_i .

Si vede facilmente che in $\mathfrak{M}$ la formula $A(p)$ non ammette punto fisso.

ii) È facile provare che in $\mathfrak{M}$ la formula $A(p) \equiv \neg \Box^m p$ non ha punto fisso.

Si ha perciò il seguente legame tra proprietà del punto fisso e canonicità:

TEOREMA 3.6. – *Se L ha la proprietà del punto fisso e gode della regola della disgiunzione, allora L non è canonica.*

DIMOSTRAZIONE. – Se L è fornita della regola della disgiunzione allora il modello canonico è fortemente generato (cfr. Hughes-Cresswell [7]) e dunque esiste un punto riflessivo. Per quanto dimostrato nel teorema 3.3 tale modello non può essere basato su una struttura in cui L è valida.

I legami tra fondatezza e punto fisso sono evidenziati, oltre che dal corollario 3.4, dal seguente:

TEOREMA 3.7. – *Sia L un linguaggio modale nelle variabili $p_0, \dots, p_n, \dots$, e sia L' il linguaggio ottenuto aggiungendo a L le nuove variabili $q_0, \dots, q_n, \dots$*

Sia $\mathfrak{M} = \langle X, R, \Vdash \rangle$ un modello di Kripke con R inversamente ben fondata. È possibile allora estendere $\Vdash$ a una relazione di forcing $\Vdash'$ su L' tale che, per ogni formula $A(p)$ di L' con p sotto l'azione di $\Box$, esista una variabile q_i tale che $\mathfrak{M} \models_2 q_i \leftrightarrow A(p/q_i)$.

DIMOSTRAZIONE. – Sia $A_0(p), A_1(p), \dots$ una enumerazione delle formule di L' con p sotto l'azione di $\Box$. Procediamo per induzione su n . Supponiamo di aver esteso, per ogni $j < i$, la relazione di forcing su una variabile q_{n_j} in modo che $\mathfrak{M} \models_2 q_{n_j} \leftrightarrow A_j(p/q_{n_j})$. Sia q una variabile tale che $q \notin \{q_{n_j} \mid j < i\}$ e che q non occorra in alcun A_j con $j \leq i$.

Definiamo $\Vdash'$ su q per induzione sul rango (rispetto alla relazione ben fondata R^{-1}) del nodo x . Assumiamo dunque (ipotesi induttiva) di aver definito $\Vdash'$ per tutte le coppie (y, q) con xRy , in modo che per ogni y se xRy allora $y \Vdash' q \leftrightarrow A_i(p/q)$. Poiché p è sotto l'azione di $\Box$ in A_i , la definizione di $\Vdash'$ su tutte le coppie (y, q) con xRy determina univocamente se $x \Vdash' A_i(p/q)$ o meno. Definiamo allora: $x \Vdash' q$ se e solo se $x \Vdash' A_i(p/q)$.

È presto visto che $\Vdash'$ soddisfa i nostri requisiti.

Considerazioni finali.

I risultati di questo lavoro consentono di classificare le principali logiche modali rispetto alle varie proprietà di punto fisso. Riassumendo si ottiene che i sistemi KV e KW hanno la proprietà del punto fisso esplicito, $K4$ è consistente con la proprietà del punto fisso esplicito ma non è stabile rispetto alla proprietà del punto fisso, K è stabile rispetto alla proprietà del punto fisso, mentre le altre logiche modali più utilizzate (tutte le estensioni di KT , $KD4$, $KD4E$, KT^*) non sono consistenti con nessuna proprietà del punto fisso.

Ringraziamenti. L'autore è grato al prof. Franco Montagna per la gentile collaborazione e i preziosi consigli.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. BELLISSIMA, *Atoms in modal algebras*, Zeitscr. f. math. Logik un Grundlagen d. Math., Bd. 30 (1984), 303-312.
- [2] C. BERNARDI, *The uniquenesses of the fixed point theorem in every diagonalizable algebra (The algebraization of theories which express Theor. VIII)*, Studia Logica, 35 (1976), 335-343.
- [3] C. BERNARDI, *The fixed point theorem for the diagonalizable algebras (The algebraization of theories which express Theor. III)*, Studia Logica, 34 (1975), 239-251.

- [4] G. BOLOS - G. SAMBIN, *An incomplete system of modal logic*, J. Philosophical Logic, **14** (1985), 351-358.
- [5] S. FEFERMAN, *The Arithmetization of metamathematics in a general setting*, Fund. Math., **49** (1960).
- [6] P. R. HALMOS, *Algebraic Logic*, Chelsea Publishing Company, New York (1962).
- [7] G. E. HUGHES - M. J. CRESSWELL, *Guida alla logica modale*, CLUEB, Bologna (1990).
- [8] R. MAGARI, *The diagonalizable algebras*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), **12** (1975), 321-331.
- [9] R. MAGARI, *Primi risultati sulla varietà di Boolos*, Boll. Un. Mat. Ital., (6) 1-B (1982), 359-367.
- [10] F. MONTAGNA, *On the diagonalizable algebra of Peano Arithmetic*, Boll. Un. Mat. Ital. (5), **16-B** (1979), 795-812.
- [11] G. SAMBIN, *An effective fixed point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras (The algebraization of theories which express Theor. IX)*, Studia Logica, **35** (1976), 345-361.
- [12] C. SMORYNSKY, *Self-Reference and Modal Logic*, Springer-Verlag, New York (1985).
- [13] A. VISSER, *Peano's Smart Children (a provability logical study of systems with built-in consistency)*, Logic Group, Preprint Series No. 14; Departement of Philosophy, University of Utrecht.

Dipartimento di Scienze Umane, Università di Ferrara
Via Savonarola 38, 44100 Ferrara (Italy)