
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

WOLFGANG J. RUNGALDIER

Sugli sviluppi della matematica applicata in un settore interdisciplinare: la finanza matematica

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 2-A—La
Matematica nella Società e nella Cultura (1999), n.3, p. 297–316.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_3_297_0>](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_3_297_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sugli sviluppi della matematica applicata in un settore interdisciplinare: la finanza matematica.

WOLFGANG J. RUNGGALDIER

Sommario. – *La moderna finanza matematica è un settore interdisciplinare tra economia e matematica che, allo stato attuale, è a forte contenuto matematico, soprattutto probabilistico. Iniziamo questo articolo accennando alle origini di questa disciplina, che non sono molto lontane nel tempo e che erano di natura più economica/econometrica. Successivamente arriveremo a descrivere gli sviluppi più recenti e più tipicamente matematici.*

1. – Introduzione.

Ci si prefigge qui di dare una breve descrizione dello sviluppo che ha portato alla moderna finanza matematica e di come questo sviluppo si sia concretizzato nello stato attuale della disciplina. La finanza matematica ha recentemente suscitato un notevole interesse, sia teorico che pratico. Da un lato c'è stata l'introduzione di nuovi strumenti finanziari destinati soprattutto a controllare il rischio nelle operazioni finanziarie e questo ha condotto a nuovi problemi di natura non solo economica, ma anche matematica. Dall'altro lato, queste nuove problematiche costituiscono un terreno fertile per l'applicazione di tecniche matematiche abbastanza sofisticate, soprattutto di natura probabilistica.

Lo sviluppo della teoria della finanza matematica è un tipico esempio di interdisciplinarietà tra matematica ed economia. I primi sviluppi erano prevalentemente di natura economica/econometrica. Gli aspetti matematici sono diventati via via più consistenti, soprattutto dal momento in cui nella teoria economica si è passati da mo-

delli uniperiodali, o più generalmente modelli a tempo discreto, a modelli intertemporali a tempo continuo (per una illustrazione più dettagliata dei concetti di *modello uniperiodale* e *modello intertemporale* si rimanda al paragrafo 2).

Come tipicamente accade in queste situazioni, è difficile dare un quadro completo dello sviluppo di tutte le tematiche di interesse per l'attuale finanza matematica. Qui si è cercato di illustrare alcuni degli sviluppi più incisivi ed, inevitabilmente, la trattazione risente delle competenze e degli interessi specifici dell'autore. Per mantenere più contenuta la trattazione, si è per esempio deliberatamente tralasciato ogni accenno al campo assicurativo ed ai legami di quest'ultimo con la finanza matematica. Similmente, non sono trattati aspetti particolari del mercato obbligazionario.

Poiché la disciplina è molto recente, anche lo sviluppo storico lo è. Mentre le radici possono essere cercate in un passato più lontano, il vero sviluppo è avvenuto in tempi recenti e, con qualche eccezione (si veda p.es. [4]), risale agli ultimi 50 anni. Gli aspetti più propriamente matematici hanno avuto uno sviluppo ancora più vicino nel tempo anche se le tecniche matematiche stesse appartengono al patrimonio culturale della matematica ed hanno quindi una storia più lunga. In accordo con quanto sopra, non è quindi molto facile reperire trattazioni della disciplina a carattere storico. Ci limitiamo qui a citare i recenti articoli [20], [52].

Nel successivo paragrafo 2 accenneremo alla teoria classica del portafoglio e dello *asset pricing*. Questa teoria classica, anche se non priva di contenuto matematico, è stata sviluppata soprattutto in campo economico/econometrico ed è legata a nomi famosi, tra cui vari premi Nobel. Questa teoria costituisce però la base per gli sviluppi recenti anche di natura più matematica e così, nel sottoparagrafo 2.3, cercheremo di dare un cenno a come questa teoria classica si è concretizzata nell'attuale stato dell'arte. Nel paragrafo 3 cercheremo poi di dare un cenno a come, parallelamente ed in campo più propriamente matematico-statistico-fisico, si è sviluppata una teoria dei mercati finanziari che si concentra sulla descrizione dell'evoluzione dei prezzi dei titoli di mercato e che risale all'inizio del secolo scorso. Nell'ultimo paragrafo 4 ci concentreremo infine sullo sviluppo più

recente che ha visto la matematica, in particolare la probabilità, entrare in maniera decisiva.

2. – La teoria classica del portafoglio e dello asset pricing e sue estensioni.

La teoria classica riguarda uno sviluppo in campo più propriamente economico/econometrico e che ha portato alla definizione di alcuni concetti fondamentali, sulla base dei quali ha poi potuto svilupparsi la teoria più recente.

2.1. *Decisioni in condizioni di incertezza e scelta del portafoglio.*

Gli inizi si concentrano soprattutto sulla teoria del portafoglio. Essa riguarda un investitore che deve prendere una decisione su come ripartire il suo capitale investendolo in vari titoli/beni, con l'obiettivo di scegliere una strategia ottimale di investimento: dato un capitale (ricchezza) iniziale x , l'investitore deve decidere quante unità di quale titolo (bene) possedere in quale istante di tempo. Le conseguenze della decisione vengono valutate in termini dell'utilità attesa della ricchezza finale al tempo T , che il decisore cerca di massimizzare. Per semplicità, qui ci limitiamo a considerare solo decisioni di investimento e non anche di consumo; la valutazione delle decisioni si limita quindi all'utilità della ricchezza (rendimento) finale.

Siccome i prezzi dei titoli sono aleatori, una tale teoria si collega naturalmente alla teoria delle decisioni in condizioni di incertezza. Si può far risalire quest'ultima a Bernoulli (si veda la riedizione [6]) ed il riferimento più classico è quello dei contributi di Von Neumann e Morgenstern [54], anche se vi hanno contribuito molti altri autori tra cui citiamo De Finetti (per una descrizione della sua attività scientifica si veda p.es. [1]).

Uno dei concetti economico-matematici legati alla teoria delle decisioni in condizioni di incertezza è quello di funzione di utilità, che rappresenta un indicatore del grado di soddisfazione di un individuo in conseguenza della disponibilità di un capitale o di un consumo. Le funzioni di utilità più usate sono quelle di un decisore avverso al ri-

schio e sono funzioni strettamente crescenti e strettamente concave, il che esprime il fatto che un investitore preferisce sempre più capitale (consumo) a meno, ma l'utilità aggiuntiva dovuta ad un'unità aggiuntiva di capitale (consumo) decresce col livello di quest'ultimo.

Per la teoria delle decisioni vale il principio di Bernoulli *dell'utilità attesa*, secondo il quale la scelta del decisore risulta quella che massimizza l'utilità attesa. Questo principio si applica anche alla scelta ottimale di portafoglio: ogni portafoglio ha infatti un suo rendimento (finale) e, piuttosto che massimizzare il suo rendimento atteso, si cerca di massimizzare l'utilità attesa di tale rendimento. Come osservato da Markowitz [43], la massimizzazione del rendimento atteso porterebbe ad investire in portafogli poco diversificati che, assieme ad un rendimento elevato, implicherebbero però anche un rischio elevato.

2.2. *Il principio media-varianza (Markowitz) ed il CAPM (Capital Asset Pricing Model).*

Prescindendo dalla teoria, più economica, di equilibrio iniziata essenzialmente con i lavori di Arrow e Debreu [3], la teoria moderna della finanza inizia con la teoria del portafoglio di Markowitz. Supponendo di misurare il rischio di un investimento mediante la varianza del suo rendimento, Markowitz [43] concepisce la funzione di utilità in termini di valore atteso e varianza del rendimento. Viene ipotizzato un investitore che tende a realizzare, per ogni livello di rischio, il massimo rendimento atteso oppure, a parità di rendimento atteso, l'investimento a minor rischio. Questo ha portato al *principio media-varianza di Markowitz*. Indicando con ϕ una data strategia di investimento e con $\mu(\phi)$ e $\sigma^2(\phi)$ media e varianza, rispettivamente, del rendimento del corrispondente portafoglio, il principio consiste in:

- Dato un confine superiore σ^2 per $\sigma^2(\phi)$, scegliere ϕ tale che $\mu(\phi)$ sia massima per tutti i ϕ con $\sigma^2(\phi) \leq \sigma^2$;
oppure:
- Dato un confine superiore μ per $\mu(\phi)$, scegliere ϕ tale che $\sigma^2(\phi)$ sia minima per tutti i ϕ con $\mu(\phi) \leq \mu$.

Questo esprime il fatto che un individuo preferisce un aumento del benessere che però nello stesso tempo minimizzi il rischio connesso con un possibile guadagno.

Una formulazione alternativa, più sintetica, del principio media-varianza è di scegliere ϕ in modo da massimizzare $\mu(\phi) - \alpha\sigma^2(\phi)$ per un α assegnato, cioè di massimizzare una media pesata di $\mu(\phi)$ e $\sigma^2(\phi)$.

Nel seguito, quando considereremo il problema della ottimizzazione della scelta del portafoglio senza riferimento specifico al criterio media-varianza, intenderemo il problema più generale descritto nel precedente sottoparagrafo e cioè quello di scegliere una strategia di investimento ϕ^* tale che

$$(1) \quad E\{u(Y_{x, \phi^*})\} = \sup_{\phi} E\{u(Y_{x, \phi})\}$$

dove $Y_{x, \phi}$ indica il rendimento di un portafoglio corrispondente ad un capitale iniziale x e ad una strategia di investimento ϕ e dove $u(\cdot)$ è la funzione utilità di un investitore avverso al rischio, cioè crescente e concava. È implicito che supporremo l'esistenza dei valori attesi in (1). Facciamo anche notare che (si veda p.es. [11]) il criterio (1) con $u(\cdot)$ concava non è in generale (cioè per qualsiasi distribuzione di $Y_{x, \phi}$) equivalente a quello di media-varianza, ma solo per $u(\cdot)$ quadratica e concava.

Dalla teoria della scelta del portafoglio trae origine una teoria di valutazione o prezzaggio (*Capital Asset Pricing Model - CAPM*) e che si può collegare ai lavori [51], [38], [47]. Si tratta di una teoria di equilibrio di mercato per i prezzi dei titoli sotto condizioni di rischio e fondata sulla seguente osservazione: poiché gli investitori si basano sulla compensazione tra rischio e rendimento, in equilibrio i titoli ad alto rischio devono compensare gli investitori offrendo rendimenti più elevati.

2.3. *Sviluppi ulteriori della teoria classica come fondamento della moderna teoria della finanza matematica.*

Nella teoria classica di Markowitz e del CAPM ci sono varie limitazioni, tra cui:

- Il rischio di un portafoglio è misurato con la varianza del suo rendimento, che penalizza simmetricamente le deviazioni dalla media e quindi in ugual modo scarti sia negativi che positivi. Il criterio della varianza richiede, inoltre, anche la determinazione delle covarianze tra titoli, che può risultare estremamente onerosa;

- il modello è uniperiodale, mentre in realtà gli investitori ribilanciano i loro portafogli nel corso del tempo per far fronte a cambiamenti nelle attese dei prezzi.

Si parla di modelli *uniperiodali* se si suppone che il decisore può prendere una decisione una sola volta all'inizio del periodo di interesse. Si parla invece di modelli *multiperiodali* se il periodo di interesse viene scomposto in più sottoperiodi, in ciascuno dei quali si affronta un problema di tipo uniperiodale. Generalmente in un modello multiperiodale i singoli problemi uniperiodali non sono indipendenti tra loro, ma la scelta di una data decisione in un dato periodo incide sulla scelta delle decisioni nei periodi successivi. Si parla allora di modelli *intertemporal*.

Per ovviare agli inconvenienti suscitati, si sono avuti successivamente vari sviluppi. Nel seguito accenniamo ad alcuni tra i più significativi di questi.

2.3.1. Misure alternative di rischio.

Nonostante tutte le critiche alla varianza come misura di rischio, essa è rimasta a lungo la principale misura di rischio e questo anche per la sua trattabilità matematica in quanto valore atteso del quadrato degli scarti. Solo recentemente sono state introdotte altre misure di rischio più realistiche, in particolare misure asimmetriche come lo *shortfall risk* che è il valore atteso del quadrato (o di una funzione convessa) degli scarti negativi. Più in generale, sono state introdotte le cosiddette *misure coerenti di rischio* (si veda [2]).

2.3.2. Modelli fattoriali ed APT.

Per evitare l'oneroso calcolo delle covarianze nel modello di Markowitz, una modifica è stata operata ancora da Sharpe nel 1963 (si veda [50]) scomponendo il rendimento di un generico titolo in una

parte sistematica dovuta ad un *portafoglio di mercato* (media pesata dei rendimenti di tutti i titoli circolanti con pesi dati dalle proporzioni secondo le quali circolano) ed in una parte non sistematica. Le parti non sistematiche sono supposte non correlate tra loro. In queste condizioni la covarianza tra titoli si calcola semplicemente mediante la varianza del portafoglio di mercato utilizzando poi anche i coefficienti che legano il rendimento dei vari titoli al portafoglio di mercato (si veda p.es. [12]). Si ha, inoltre, che il portafoglio di mercato viene assunto come una variabile esplicativa, a cui ricondurre la parte principale della aleatorietà dei prezzi dei titoli. Nella estensione del CAPM, chiamata APT (*Arbitrage Pricing Theory*) e che risale principalmente a Ross [49], si considerano più variabili esplicative o fattori. Il termine *fattore* è qui usato in analogia a quanto avviene in Statistica, dove uno dei problemi è di ricondurre la variabilità di una grandezza aleatoria a quella di alcuni *fattori esplicativi*, che si suppone incidano sulla grandezza in esame. Questo ha portato a modelli fattoriali del tipo

$$(2) \quad Y^i = a^i + \sum_{j=1}^n b^{i,j} F^j + R^i$$

dove il rendimento (*yield*) Y^i del titolo i -esimo è considerato una combinazione lineare di n fattori F^j (la parte sistematica) e di un residuo R^i (la parte non sistematica). Modelli del tipo (2) ricordano infatti i modelli fattoriali (regressione di Y^i sugli F^j) in uso in Statistica ed esprimono appunto il rendimento dei vari titoli in funzione di alcuni fattori aleatori che pilotano tutto il mercato. Modelli fattoriali, non necessariamente lineari, sono tuttora largamente usati nella modellistica dei mercati, in particolare dei mercati obbligazionari (si veda p.es. [21]).

2.3.3. Il principio di assenza di opportunità di arbitraggio come base per la valutazione dei titoli.

Già nello APT, per la valutazione di titoli, ci si basa sul *principio di assenza di opportunità di arbitraggio*. Secondo tale principio, in equilibrio i prezzi dei titoli devono soddisfare ad una coerenza interna che rende impossibile creare una strategia di investimento senza

rischio specifico la quale, partendo da un costo nullo, garantisca un profitto quasi certamente positivo. La giustificazione di questo principio si basa sul fatto che gli investitori sono razionali e sfruttano ogni possibilità di arbitraggio. La conseguenza è che una possibilità di arbitraggio non può perdurare. Questo principio è tuttora il principio basilare per valutare titoli *derivati*. Questi sono titoli, il cui prezzo *deriva* dal prezzo di altri titoli sottostanti detti anche *primari*. Il principio viene utilizzato formando portafogli che includono il titolo da prezzare e che siano localmente non rischiosi. Si impone poi che il rendimento del portafoglio così ottenuto sia uguale a quello di un titolo non rischioso (a rendimento certo) come può esserlo un conto bancario. (Sempre per il principio di assenza di opportunità di arbitraggio, tutti i titoli non rischiosi dovrebbero avere lo stesso rendimento).

2.3.4. Modelli intertemporali.

La limitazione decisamente più forte nel modello di Markowitz e del CAPM è il fatto di essere uniperiodale. Dopo alcuni lavori apparsi negli ultimi anni '60 su un'estensione intertemporale a tempo discreto, è subentrato il lavoro di Merton [45]. Esso utilizza modelli a tempo continuo, che si collegano ai modelli sull'evoluzione dei prezzi, che erano stati sviluppati nel frattempo (si veda il successivo paragrafo 3). Il passaggio a tempo continuo ha richiesto una maggiore sofisticazione matematica e questo ha fatto sì che la matematica abbia acquisito una ancora maggiore importanza nella finanza. L'estensione intertemporale non era immediata e molti lavori si sono succeduti occupandosi del problema. L'approccio di Merton si basa sul *controllo stocastico*, che è una disciplina matematica indipendente per l'ottimizzazione dinamica in condizioni di incertezza. Per garantire il legame intertemporale della soluzione, viene introdotto il concetto di *portafoglio autofinanziante*, che è un portafoglio in cui le posizioni vengono ribilanciate nel corso del tempo senza aggiungere capitale né consumare (la ricchezza prima di ogni ribilanciamento uguaglia la ricchezza dopo il ribilanciamento meno eventuali costi di transazione). L'approccio di Merton, basato sul controllo stocastico, è un approccio che continua ad essere valido anche se, per

alcune situazioni, è stato affiancato da una tecnica alternativa a cui si accennerà nel sottoparagrafo 4.

3. – Modelli per la evoluzione dei prezzi.

3.1. *Il contributo di Bachelier.*

Uno dei lavori pionieristici sull'analisi dei mercati azionari e delle opzioni è stata la tesi di Louis Bachelier *Théorie de la Spéculation* sostenuta alla Sorbonna il 25 marzo 1900. Questa tesi (vedi [4]), ormai centennale, può essere considerata come l'inizio della moderna finanza matematica. Essa inizia con la descrizione dei prodotti disponibili all'epoca sul mercato azionario francese, diverso da quello americano. Successivamente viene sviluppata tutta una teoria matematica per la modellizzazione dell'evoluzione dei prezzi ed, infine, viene applicato il modello ottenuto per calcolare prezzi di opzioni (per le opzioni si veda il successivo sottoparagrafo 4.2). Oltre agli aspetti finanziari, un grosso contributo di questa tesi, che è una tesi matematica con relatore Henri Poincaré, è di aver iniziato la teoria del moto Browniano e di tecniche collegate di processi stocastici (di Markov) e di calcolo stocastico. Per quanto riguarda gli aspetti finanziari, Bachelier si basa sul principio che *l'attesa dello speculatore è zero*. Egli accetta così implicitamente come assioma il fatto che il mercato valuta i titoli usando una misura martingala (per questo concetto si veda il sottoparagrafo 4.1).

Forse i tempi non erano ancora maturi e quindi, nonostante gli impressionanti contributi di questa tesi, essa e Bachelier stesso rimasero a lungo in oscurità. È solo di recente che il contributo di Bachelier è stato pienamente valorizzato e questo anche in conseguenza del recente rapido sviluppo della finanza matematica, come pure della più approfondita conoscenza del ruolo fondamentale del moto Browniano. In occasione del centenario della tesi di L. Bachelier, nell'anno 2000 si sono tenute varie celebrazioni. Anche la Bachelier Finance Society, recentemente creata, porta il suo nome. Per una descrizione più dettagliata del contributo di Bachelier si rimanda a [13] e [53].

3.2. Modello lognormale e modelli alternativi al lognormale.

Il moto browniano introdotto da Bachelier conduce a distribuzioni normali (gaussiane) con supporto tutto l'asse reale e quindi non è propriamente adatto a descrivere l'evoluzione di prezzi, che non possono assumere valori negativi. Un modello più adatto, e tuttora comunemente usato, è il modello lognormale, secondo il quale il prezzo $S(t)$ di un generico titolo al generico istante t è dato dalla soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$(3) \quad dS(t) = \mu(t) S(t) dt + \sigma(t) S(t) dw(t)$$

dove $w(t)$ è un processo di Wiener (moto browniano), $\mu(t)$ e $\sigma(t)$ sono funzioni deterministiche del tempo e rappresentano, rispettivamente, il coefficiente di deriva (*drift*) e la *volatilità*. Applicando la cosiddetta *formula di differenziazione di Ito* (si veda p.es. [5]) al logaritmo $Y(t) := \log S(t)$ si ha infatti

$$(4) \quad dY(t) = \left(\mu(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t) \right) dt + \sigma(t) dw(t)$$

che è un processo normale (gaussiano). Il processo $S(t)$, definito da (3), è quindi un processo il cui logaritmo è normale, cioè è *lognormale* ed, essendo dato da $S(t) = \exp[Y(t)]$, assume valori quasi certamente positivi. Con $\mu(t) \equiv \mu$ e $\sigma(t) \equiv \sigma$, il modello (3) è il modello base della teoria di Black e Scholes [9].

Ben presto, soprattutto mediante test statistici, ci si è accorti che il modello lognormale (3) non rappresenta molto fedelmente i prezzi effettivamente osservati. Ad iniziare da Mandelbrot [40] e Fama [24] si è quindi cercato di proporre modelli più aderenti alla realtà, sostituendo in (3) il moto browniano $w(t)$ con un processo $L(t)$ cosiddetto di Levy. Come il moto browniano, i processi di Levy sono processi ad incrementi indipendenti, però la distribuzione degli incrementi è più generale di quella normale, caratteristica per il moto browniano. In particolare, mentre i processi $S(t)$ soluzione di (3) hanno traiettorie continue, quelli che corrispondono a (3) con $w(t)$ sostituito da $L(t)$ possono anche avere traiettorie discontinue e *code grosse* secondo quanto riscontrato nella realtà. Informalmente parlando, si dice che una variabile casuale ha una distribuzione con *code grosse*

se può assumere valori, che in senso assoluto sono molto grandi, con probabilità superiore a quanto avviene con la distribuzione normale. Si parla allora appunto di *code grosse*, perché nel grafico della distribuzione le *code* sono più grosse di quanto avviene nella curva *a campana* tipica della distribuzione normale. Per una trattazione più esauriente di questo argomento si rimanda a [42]. Nel contesto dei processi pilotati da un Levy si possono anche considerare i *processi diffusivi con salti*, che sono stati utilizzati per la prima volta in [46] e, più recentemente ad esempio in [44], [48], [8]. Sempre ancora recentemente si sono poi anche considerati modelli del tipo (3) con $w(t)$ un *moto Browniano frazionario* (si veda p.es. [41]).

Nonostante modelli alternativi a quello lognormale siano in circolazione da molto tempo, quello lognormale continua ad essere un modello molto usato e questo anche per la sua maggiore semplicità e trattabilità matematica. Lo stesso modello (3) può però anche essere usato per descrivere processi $S(t)$ più generali di quello lognormale se $\sigma(t)$, anziché funzione deterministica del tempo, viene considerata un processo stocastico indipendente da $w(t)$. Questi sono i cosiddetti *modelli a volatilità stocastica*, a cui accenneremo nel prossimo sottoparagrafo.

3.3. Modelli ARCH e modelli a volatilità stocastica

I modelli ARCH (*autoregressive conditionally heteroskedastic*) erano diventati di moda negli anni '80 per sopperire alle deficienze del classico modello lognormale (si veda p.es. [23], [10], [30]). Si parte dall'osservazione che grossi cambiamenti nei prezzi tendono ad essere seguiti da grossi cambiamenti, cosicché il passato recente contiene informazione per la predizione seguente della varianza. Questo ha condotto a modelli del tipo (3), in cui la volatilità è funzione del passato del processo stesso. Questi modelli hanno ora perso un po' della loro popolarità, essendo subentrati i modelli a volatilità stocastica (si veda p.es. [34]), dove la volatilità è un processo stocastico essenzialmente esogeno, cioè pilotato da fattori aleatori esogeni al processo stesso.

4. Fondamenti della moderna teoria probabilistica della finanza.

I modelli classici uniperiodali, che erano prevalentemente stati sviluppati in ambito economico, richiedevano strumenti matematici relativamente elementari. L'estensione a modelli intertemporali a tempo continuo ha richiesto l'utilizzo di strumenti matematici più avanzati quali i processi stocastici ed il calcolo stocastico, come pure le equazioni alle derivate parziali.

4.1. I teoremi fondamentali dello Asset Pricing.

Si è visto come il principio di assenza di opportunità di arbitraggio sia un principio fondamentale per la valutazione dei titoli. Esso è un principio economico e ci si può chiedere se ammette una controparte di natura matematica. I lavori fondamentali [31], [32] hanno condotto al cosiddetto *primo e secondo teorema fondamentale dello asset pricing*, che danno una risposta alla domanda appena posta.

Il primo teorema afferma che l'assenza di opportunità di arbitraggio (AOA) è essenzialmente equivalente all'esistenza di una *misura martingala equivalente*. Quest'ultima è una misura di probabilità Q , equivalente a quella P del mondo reale, nella quale i prezzi dei titoli rischiosi scontati rispetto al titolo non rischioso (ricordiamo che, in base al principio di AOA, il titolo non rischioso è essenzialmente unico) formano delle martingale. Queste ultime sono processi che, grossolanamente parlando, sono tali che le attese dei valori futuri coincidono col valore corrente. Questa equivalenza di AOA con l'esistenza di una misura martingala equivalente vale «essenzialmente». Vari raffinamenti si sono succeduti, tra cui citiamo come esempio i lavori [17], [29] e, soprattutto, una serie di lavori di Delbaen e Schachermayer (si veda p.es. [19]).

Il secondo teorema fondamentale afferma che, se il mercato è completo (cioé tale che, pur di disporre di sufficiente capitale iniziale, ogni titolo derivato può essere replicato con un portafoglio autofinanziante), allora la misura martingala equivalente è unica (si veda p.es. [33]). Vedremo più avanti come questi risultati sono effettivamente *fondamentali* nella moderna finanza matematica.

4.2. Valutazione di derivati (formula di Black e Scholes).

Come già accennato, un derivato è un titolo (secondario), il cui rendimento dipende dal valore di altri titoli sottostanti (primari). Esempi classici di derivati sono le *opzioni di acquisto (di vendita)* di tipo Europeo che danno al detentore il diritto di acquistare (vendere) un dato sottostante ad un dato prezzo (*prezzo di esercizio*) ad un dato istante T (*maturità*). Se K è il prezzo di esercizio e $S(T)$ il prezzo del sottostante alla maturità T , il valore in T della corrispondente opzione di acquisto è quindi $(S(T) - K)^+$. Pare che le opzioni siano implicitamente esistite nella pratica quotidiana fin dall'antica Grecia (storia di Talete di Mileto citata da Aristotele nella *Repubblica*). Solo recentemente ci si è però interessati a prezzare opzioni e derivati in generale. A prescindere dagli accenni in [4], il contributo fondamentale qui è quello di Black e Scholes [9] che, per un modello di mercato completo ed utilizzando il principio di AOA, ricavarono un'equazione differenziale alle derivate parziali per il prezzo di un'opzione nel generico istante $t < T$ ipotizzato come una funzione $F(t, S(t))$ di classe $\mathcal{C}^1$ nel tempo t e di classe $\mathcal{C}^2$ nel prezzo $S(t)$ del sottostante. Utilizzando risultati sulla rappresentazione probabilistica (formula di Feynman-Kac, si veda p.es. [5]) di soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali con condizioni al bordo, risulta $F(t, s) = E_{t,s}^Q \{ (S(T) - K)^+ \}$, dove la parte destra sta ad indicare il valore atteso di $(S(T) - K)^+$ nella misura Q , cioè l'unica misura martingala equivalente, dato che al tempo t il sottostante ha valore $S(t) = s$. (Per semplicità di trattazione supponiamo che tutti i prezzi siano già scontati rispetto al titolo non rischioso). Si noti che il risultato vale per qualunque derivato il cui rendimento alla scadenza sia una funzione $H(S(T))$ sufficientemente regolare di $S(T)$, pur di sostituire $H(S(T))$ a $(S(T) - K)^+$. La cosa importante per il risultato è che il mercato sia completo. Per $H(S(T)) = (S(T) - K)^+$ il valore atteso può essere esplicitamente calcolato ed è dato, appunto, dalla nota *formula di Black e Scholes*. Risultati ulteriori si trovano, tra altri, in [46] ed in [14], nel quale ultimo si considera un particolare modello di mercato completo, il modello

binomiale a tempo discreto, che richiede tecniche matematiche meno sofisticate ed ha quindi permesso una grande divulgazione.

Se il mercato non è completo, il che nella realtà accade sempre (la completezza del mercato è solo una idealizzazione matematica) allora, in virtù del secondo teorema dello asset pricing, la misura martingala Q non è unica. L'espressione $E_{t,s}^Q\{(S(T) - K)^+\}$ fornisce allora sempre ancora un prezzo che non ammette arbitraggio, ma questo prezzo non è più unico. In altre parole, il principio di AOA non basta per dare un prezzo univoco a derivati in un mercato incompleto. Occorre allora seguire una strada diversa per arrivare ad un prezzo ed a questo accenneremo nel prossimo sottoparagrafo.

4.3. Strategie di copertura e valutazione in mercati incompleti.

Black e Scholes [9] utilizzano un modello di mercato completo e questo significa che esiste un portafoglio autofinanziante ϕ il cui valore alla maturità replica perfettamente il rendimento finale dell'opzione. Indicando con $V_\phi(t)$ il valore al tempo t del portafoglio ϕ , si ha cioè che $V_\phi(T) = (S(T) - K)^+$ q.c. Per escludere arbitraggio, il valore $V_\phi(t)$ in $t < T$ di tale portafoglio deve quindi coincidere con il valore dell'opzione nello stesso istante, deve cioè essere $V_\phi(t) = E_{t,s}^Q\{(S(T) - K)^+\}$. Quindi, se il mercato è completo, il prezzo in $t < T$ di un derivato in condizioni di AOA si può anche ottenere come valore in t di un portafoglio autofinanziante e di copertura (che cioè replica perfettamente il rendimento finale).

Se il mercato non è completo, si possono considerare portafogli autofinanzianti che, pur non essendo di copertura (di replica perfetta), sono vicini ad esserlo e poi definire il prezzo del derivato in $t < T$ come il valore di tale portafoglio. Indicando ancora con $V_\phi(T)$ il valore in T del portafoglio ϕ , un criterio (si veda [26], [27]) è quello di scegliere ϕ autofinanziante e tale che minimizzi il rischio $R_\phi := E\{(H(S(T)) - V_\phi(T))^2\}$, dove il valore atteso è nella misura P del mondo reale. Ci si ritrova quindi con un problema di scelta di portafoglio dove il criterio è il valore atteso del quadrato dello scarto finale. Questo criterio è quindi sufficientemente trattabile dal punto di vista matematico. Ovviamente, al posto del criterio simmetrico si

possono anche considerare criteri asimmetrici, come la minimizzazione dello *shortfall risk* $SR_\phi := E\{(H(S(T)) - V_\phi(T))^+\}$ (si veda p.es. [15], [25]). I criteri asimmetrici possono essere più significativi dal punto di vista economico-finanziario, ma sono più difficili da trattare matematicamente. Un criterio alternativo ai criteri della minimizzazione di un rischio e che ha recentemente condotto ad una serie di lavori (ci limitiamo a citare [16]) è il criterio della superreplica, che consiste nel determinare una ϕ autofinanziante per cui $V_\phi(T) \geq H(S(T))$ q.c. Un approccio ancora alternativo, si veda p.es. [22], è quello di determinare tutto il campo di variabilità dei possibili prezzi in un mercato incompleto (dal prezzo minimo o dell'acquirente al prezzo massimo o del venditore). Per ulteriori sviluppi si rimanda a [28] ed ai riferimenti ivi citati.

Se nella minimizzazione del rischio (simmetrico o non) risulta una strategia ϕ^* con rischio nullo, questo significa che tale strategia è di replica perfetta e che quindi il mercato è completo. Per la determinazione della strategia di replica perfetta in un mercato completo esiste una procedura diretta, alla quale accenniamo qui di seguito anche in vista del prossimo sottoparagrafo. Se per semplicità consideriamo un mercato con un solo titolo rischioso, il cui prezzo è scontato rispetto al titolo nonrischioso, e se ϕ rappresenta una strategia di investimento autofinanziante ($\phi(t)$ è il numero di unità del titolo rischioso possedute nel portafoglio all'istante t), allora

$$(5) \quad V_\phi(T) = V_\phi(0) + \int_0^T \phi(t) dS(t)$$

dove $dS(t)$ è il differenziale di Ito del processo del prezzo $S(t)$. Per determinare la strategia autofinanziante di copertura (replica perfetta) $\phi^*(t)$ basta quindi risolvere il problema inverso legato alla (5), avendo posto $V_\phi(T) = H(S(T))$ e $V_\phi(0) = E^Q\{H(S(T))\}$. Questo problema inverso è legato al cosiddetto problema di rappresentazione di martingale (si veda [5]), che nel caso del modello di Black e Scholes ammette la soluzione esplicita $\phi^*(t) = \frac{\partial}{\partial s} F(t, s)|_{s=S(t)}$.

4.4. *L'approccio «martingala» per la scelta del portafoglio ed ulteriori estensioni.*

Il problema inverso legato alla (5) ha applicazioni anche nel problema classico della ottimizzazione della scelta del portafoglio. Nel sottoparagrafo precedente il problema inverso è stato applicato alla determinazione della strategia autofinanziante di replica perfetta, la cui esistenza è garantita in un mercato completo. Per questo scopo in (5) si pone $V_\phi(T) = H(S(T))$, che è appunto il valore che si vuole raggiungere con la strategia di investimento. Per utilizzare una tale procedura anche nel caso del problema di ottimizzazione di portafoglio nella sua forma generale (1), si scompone quest'ultimo in due sottoproblemi:

- un problema di ottimizzazione statica per determinare $\sup_{\phi} E\{u(Y_{x, \phi})\}$;
- un problema inverso di rappresentazione del tipo (5) per determinare la strategia autofinanziante che conduce al valore ottimo determinato nel primo sottoproblema.

Questo metodo è stato introdotto verso la fine degli anni '80 da un gruppo di ricercatori americani, in particolare I. Karatzas e suoi collaboratori (si veda p.es. [36], [35]) ed è stato successivamente sviluppato ulteriormente da vari ricercatori. Per una trattazione sistematica si veda p.es. [37].

Una soluzione realistica di problemi intertemporali di ottimizzazione di portafoglio non può trascurare costi di transazione. Questo anche perché, in un contesto a tempo continuo, la mancanza di costi di transazione condurrebbe a strategie che richiedono un continuo ribilanciamento, cosa che nella pratica sarebbe impossibile. D'altra parte, un ribilanciamento continuo in presenza di costi di transazione anche minimi porterebbe a costi illimitati. Costi di transazione per la scelta del portafoglio sono stati presi in considerazione solo recentemente ed i primi lavori appaiono essere quelli di [39] in un contesto più economico e di [18] in un contesto più matematico.

La formulazione di base del problema di scelta del portafoglio è data in (1) come massimizzazione dell'utilità attesa del rendimento

del portafoglio. In linea con sviluppi recenti nella teoria del controllo stocastico e cioè del cosiddetto *controllo risk sensitive*, invece di massimizzare $E\{u(Y_{x,\phi})\}$ si può massimizzare $E\{\exp[u(Y_{x,\phi})]\}$ il che permette di tener conto di tutti i momenti di $u(Y_{x,\phi})$ e non solo del valor atteso e così generalizzare al massimo il criterio di scelta del portafoglio (si veda p.es. [7]).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] AAVV, Atti del Convegno *Ricordo di Bruno de Finetti Professore nell'Ateneo triestino*, Dipartimento di Matematica Applicata «Bruno de Finetti», Trieste, 1987.
- [2] PH. ARTZNER - F. DELBAEN - J.-M. EBER - D. HEATH, *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, **9** (1999), 203-228.
- [3] K. J. ARROW - G. DEBREU, *Existence of an equilibrium for a competitive economy*, Econometrica, **22** (1954), 265-290.
- [4] L. BACHELIER, *Théorie de la spéculation*, Gauthier-Villars 1900. Anche in: Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1900, 21-86.
- [5] P. BALDI, *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni*, Quaderni UMI Vol. 28, Pitagora, Bologna, 1984.
- [6] D. BERNOULLI, *Exposition of a new theory on the measurement of risk*, trad. di E. Sommer in Econometrica, **22** (1954), 23-36.
- [7] T. R. BIELECKI - S. R. PLISKA, *Risk sensitive asset management with transaction costs*, Finance and Stochastics, **4** (2000), 1-33.
- [8] T. BJÖRK - G. DI MASI - YU. KANANOV - W. Runggaldier, *Towards a general theory of bond markets*, Finance and Stochastics, **1** (1997), 141-174.
- [9] F. BLACK - M. S. SCHOLES, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, **81** (1973), 637-654.
- [10] T. BOLLERSLEV, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, **31** (1986), 307-327.
- [11] E. CANESTRELLI - C. NARDELLI, *Criteri per la selezione del portafoglio*, G. Giappichelli, Torino, 1991.
- [12] E. CASTAGNOLI - L. PECCATI, *Introduzione alla selezione di portafoglio*, Cooperativa di Cultura «Lorenzo Milani», Torino, 1991.
- [13] J.-M. COURTAULT - YU. KANANOV - B. BRU - P. CRÉPEL, *Louis Bachelier on the centenary of Théorie de la Spéculation*, Mathematical Finance, **10** (2000), 341-353.

- [14] J. C. COX - S. A. ROSS - M. RUBINSTEIN, *Option pricing: a simplified approach*, Journal of Financial Economics, **7** (1979), 229-263.
- [15] J. CVITANIĆ - I. KARATZAS, *On dynamic measures of risk*, Finance and Stochastics, **3** (1999), 451-482.
- [16] J. CVITANIĆ - H. PHAM - N. TOUZI, *A closed-form solution to the problem of super-replication under transaction costs*, Finance and Stochastics, **3** (1999), 35-54.
- [17] R. C. DALANG - A. MORTON - W. WILLINGER, *Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models*, Stochastics and Stochastic Reports, **29** (1990), 185-201.
- [18] M. H. A. DAVIS - A. R. NORMAN, *Portfolio selection with transaction costs*, Mathematics of Operations Research, **15** (1990), 676-713.
- [19] F. DELBAEN - W. SCHACHERMAYER, *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Mathematische Annalen, **300** (1994), 463-520.
- [20] E. DIMSON - M. MOUSSAVIAN, *Three centuries of asset pricing*, London Business School, Institute of Finance & Accounting WP-295, Jan 2000.
- [21] D. DUFFIE - R. KAN, *A yield factor model of interest rates*, Mathematical Finance, **6** (1966), 379-406.
- [22] N. EL KAROUI - M. C. QUENEZ, *Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market*, SIAM J. on Control and Optimiz., **33** (1995), 29-66.
- [23] R. E. ENGLE, *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation*, Econometrica, **50** (1982), 987-1007.
- [24] E. F. FAMA, *The behaviour of stock market prices*, Journal of Business, **38** (1965), 34-105.
- [25] H. FÖLLMER - P. LEUKERT, *Efficient hedging: cost versus shortfall risk*, Finance and Stochastics, **4** (2000), 117-146.
- [26] H. FÖLLMER - D. SONDERMANN, *Hedging of nonredundant contingent claims*, In: Contributions to Mathematical Economics in Honor of Gérard Debreu, W. Hildenbrand, A. Mas-Colell, eds. North Holland, Amsterdam, 1986, 205-223.
- [27] H. FÖLLMER - M. SCHWEIZER, *Hedging of contingent claims under incomplete information*, In: Applied Stochastic Analysis, M. H. A. Davis, R. J. Elliott, eds. Gordon & Breach, London, 1991, 389-414.
- [28] M. FRITTELLI, *Introduction to a theory of value coherent with the no-arbitrage principle*, Finance and Stochastics, **4** (2000), 275-297.
- [29] M. FRITTELLI - P. LAKNER, *Almost sure characterization of martingales*, Stochastics and Stochastics Reports, **49** (1994), 181-190.
- [30] C. GOURIEROUX, *ARCH models and financial applications*, Springer, 1997.
- [31] J. M. HARRISON - D. M. KREPS, *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*, Journal of Economic Theory, **20** (1979), 381-408.

- [32] J. M. HARRISON - S. R. PLISKA, *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Processes and Their Applications, **11** (1981), 215-260.
- [33] J. M. HARRISON - S. R. PLISKA, *A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets*, Stochastic Processes and Their Applications, **15** (1983), 313-316.
- [34] J. HULL - A. WHITE, *The pricing of options with stochastic volatilities*, Journal of Finance, **42** (1987), 281-300.
- [35] I. KARATZAS, *Optimization problems in the theory of continuous trading*, SIAM J. on Control and Optimiz., **27** (1989), 1221-1259.
- [36] I. KARATZAS - J. LEHOCZKY - S. E. SHREVE, *Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon*, SIAM J. on Control and Optimiz., **25** (1987), 1557-1586.
- [37] R. KORN, *Optimal portfolios: stochastic models for optimal investment and risk management in continuous time*, World Scientific, Singapore 1997.
- [38] J. LINTNER, *The valuation of risky assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets*, Review of Economics and Statistics, **47** (1965), 13-37.
- [39] M. J. P. MAGILL - G. M. COSTANTINIDES, *Portfolio selection with transaction costs*, Journal of Economic Theory, **13** (1976), 245-263.
- [40] B. MANDELBROT, *The variation of certain speculative prices*, Journal of Business, **36** (1963), 394-419.
- [41] B. MANDELBROT, *Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk*, Springer 1997.
- [42] R. N. MANTEGNA - H. E. STANLEY, *An introduction to Econophysics: correlation and complexity in finance*, Cambridge University Press, 2000.
- [43] H. M. MARKOWITZ, *Portfolio selection*, Journal of Finance, **7** (1952), 77-91.
- [44] F. MERCURIO - W. J. RUNGALDIER, *Option pricing for jump-diffusions: approximations and their interpretation*, Mathematical Finance, **3** (1993), 191-200.
- [45] R. C. MERTON, *An intertemporal capital asset pricing model*, Econometrica, **41** (1973), 867-887.
- [46] R. C. MERTON, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics, **3** (1976), 125-144.
- [47] J. MOSSIN, *Equilibrium in a capital asset market*, Econometrica, **34** (1966), 768-783.
- [48] S. MULINACCI, *An approximation of American option prices in a jump-diffusion model*, Stochastic Processes and Their Applications, **62** (1996), 1-17.
- [49] S. A. ROSS, *The arbitrage theory of capital asset pricing*, Journal of Economic Theory, **13** (1976), 341-360.

- [50] W. E. SHARPE, *A simplified model of portfolio analysis*, Management Science, **9** (1963), 277-293.
- [51] W. E. SHARPE, *Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk*, Journal of Finance, **19** (1964), 425-442.
- [52] S. M. SUNDARESAN, *Continuous-Time Methods in Finance: A Review and an Assessment*, Journal of Finance, **55** (2000), 1569-1622.
- [53] M. S. TAQQU, *Bachelier and his Times: A Conversation with Bernard Bru*, Finance and Stochastics, **5** (2001).
- [54] J. VON NEUMANN - O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press 1944.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università di Padova, Via Belzoni 7, I - 35131 - Padova
e-mail: runggald@math.unipd.it