Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Placido Longo

La «Flagellazione» di Piero della Francesca fra Talete e Gauss

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.2, p. 121–144.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_2_121_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

Bollettino U. M. I.
La matematica nella Società e nella Cultura
(8) 2-A (1999), pag. 121-144

La «Flagellazione» di Piero della Francesca fra Talete e Gauss.

PLACIDO LONGO

Abstract. – *Is it possible to obtain the 3D position of each object in a painted scene? Some classical and modern technics are presented and applied to the famous «Flagellazione di Cristo» by Piero della Francesca.*

La rappresentazione dello spazio nella pittura ha sempre rappresentato una sfida formidabile per il talento, l'ingegno e il genio del pittore, e le tecniche di volta in volta escogitate per migliorarla, talora dopo gestazione e maturazione di molti secoli, sono considerate fra i cardini dell'abilità pittorica.

Due esempi noti a tutti: il chiaroscuro, l'arte del contrasto con tutte le sue manipolazioni intenzionali fino allo «sfumato» nei paesaggi, e la prospettiva, intesa in senso lato come alterazione intenzionale dei rapporti metrici degli oggetti rappresentati, che sarà l'oggetto principale delle riflessioni seguenti.

Mentre i meccanismi neurologici della percezione visiva sono incredibilmente complessi e affascinanti e compendiano tutta la nostra «storia naturale», quelli fisici sono molto semplici: l'occhio è poco più che una «camera obscura», la scatola chiusa con un forellino da una parte e un vetro smerigliato dall'altra, e ciò conduce ad un modello matematico semplicissimo: ogni sorgente di luce viene percepita attraverso la proiezione da un punto, il centro ottico del cristallino, e la sezione con una superficie, la retina. Il fatto che la retina sia tutt'altro che piana non deve preoccupare chi avesse giustamente riconosciuto nella coppia proiezione-sezione, proiezione da un punto e sezione con un piano, la struttura cardine della geometria proiettiva: solo una piccola porzione della retina è utilizzata dal cervello per la percezione dei dettagli e degli allineamenti, per il riconoscimento dei quali esistono inoltre nella neo-corteccia strutture specializzate, sensibili selettivamente alle loro inclinazioni.

Questa breve intrusione nel campo neurofisiologico suggerisce immediatamente quale sia la maggiore difficoltà da affrontare per poter «percepire lo spazio»: stabilito che la visione comporta una proiezione sulla superficie sensibile della retina, la restituzione della posizione nello spazio dell'oggetto percepito comporta l'inversione di tale proiezione. Le prime proposizioni, richiamate in seguito, e ancora di più la prima tavola del trattato di Piero della Francesca sulla prospettiva (fig. 1), chiariscono una volta per tutte come tale inversione sia, in generale, impossibile.

La soluzione della Natura a quest'insormontabile difficoltà è rappresentata dalla visione binoculare: è ben noto che una fotografia stereoscopica, ossia una coppia di immagini prese da punti di vista diversi, osservata in modo opportuno, produce una sensazione di profondità paragonabile a quella di una situazione reale. È altrettanto ben noto che, in situazioni caratterizzate da oggetti molto distanti, come in montagna o nel pilotaggio d'aeroplani, l'inefficienza della visione binoculare causata da insufficiente parallasse provoca un netto degrado della capacità di percepire le distanze reali.

Un altro affascinante e moderno approccio è quello dell'olografia, basata sulla ricostruzione della luce emessa dall'oggetto con le sue caratteristiche «ondulatorie» di ampiezza e fase fedelmente riprodotte, che fornisce un modello tridimensionale dell'oggetto valido anche se si sposta il punto di osservazione, seppure entro certi limiti.

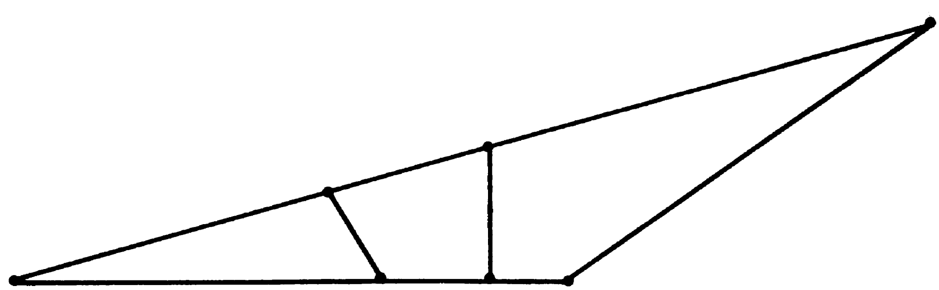

Figura 1. – Particolare dalla prima tavola del «De Prospectiva Pingendi».

Quest'intrusione, stavolta nel campo della fisica, vuole mettere in chiara evidenza l'impraticabilità, nel campo pittorico, di entrambe le tecniche: è difficile immaginare un pittore disposto a dipingere due copie separate dell'opera per i due occhi e ad imporre all'appassionato l'uso di un visore stereoscopico, né tantomeno capace o desideroso di dipingere frange d'interferenza in modo cosi preciso da poterle utilizzare per un ologramma.

Cosa gli rimane, dunque, da fare, oltre che chiudere un occhio mentre dipinge? La parola a Piero della Francesca:

«Omne quantità se rapresenta socto angolo nell'ochio.»

A questa prima proposizione del trattato fanno seguito altre tre sulle sue conseguenze:

«Tucte le base vedute socto uno medesimo angolo, ben che sieno diversamente poste, s'apresentano a l'ochio equali.» (*fig.* 1)

«Se più base fossero al'angolo loro oposte orthogonalmente, quella che s'apresenta socto magiore angolo o ella è magiore o ella è a l'angolo più propinqua.»

«Se da un puncto se partissero linee sopra a do basi equali et una fusse più propinqua che l'altra, la più propinqua farà magiore angolo nel dicto puncto.»

Teoria, pratica e storia della prospettiva in poche righe! In linguaggio odierno, l'occhio percepisce solo le dimensioni angolari, le quali sono alterate in modo noto dalla distanza. Nella tecnica pittorica, si passa così dalla conservazione dei rapporti fra le dimensioni degli oggetti reali e quelle delle loro immagini, caratteristica della pittura primitiva, all'impiego della rappresentazione alterata di tali rapporti, *per oggetti le misure reali dei quali sono supposte note*, allo scopo di suggerire all'osservatore la profondità che li separa.

Il sussistere di «convenzioni non scritte» fra il pittore e l'osservatore, a proposito delle misure e dell'orientamento degli oggetti rap-

Figura 2. – «La stanza di Ames».

presentati, costituisce il cuore stesso della possibilità di una prospettiva pittorica. Chi si fosse giustamente chiesto qual è il ruolo rivestito dall'ortogonalità nella terza proposizione del trattato, ripensi al pavimento del Teatro Olimpico di Andrea Palladio a Vicenza, o guardi la «stanza di Ames» (fig. 2), che è un effetto prospettico e non un fotomontaggio! L'ambiguità è inerente al meccanismo proiettivo dallo spazio su un piano e sono proprio le convezioni o, se si preferisce, le conoscenze degli oggetti rappresentati, a rendere efficace il loro uso a fini prospettici. Nella stanza di Ames quasi nulla è come appare: in particolare, i quadri e il fondo non sono «oposti orthogonalmente»! Ci sono infinite situazioni diverse che producono la stessa immagine di una stanza parallelepipeda, e ciò rende facilissimo l'abusare della «credulità» dell'osservatore al quale venga impedito di utilizzare la visione binoculare per apprezzare le distanze e la forma reale della stanza, costringendolo a guardare la scena da un piccolo foro!

La prospettiva architettonica ha avuto un ruolo centrale nell'evoluzione della teoria prospettica: la speciale sensibilità del cervello agli allineamenti, alla quale si faceva cenno poc'anzi, ha vincolato i pittori d'architetture ad una maggiore disciplina rispetto a quella «qualitativa» del paesaggio-con-alberi-sempre-più-piccoli-al-crescere-della-distanza. Il trattato, ma soprattutto alcune delle opere di Piero, sono forse la maggiore espressione scientifica ed artistica di tale disciplina.

La novità messa a fuoco dai pittori italiani del Quattrocento interessati alle architetture dipinte, è semplice e fondamentale: la rappresentazione «corretta» di un fascio di rette parallele nello spazio, ma non parallele al piano del dipinto — come ad esempio gli spigoli «in profondità» di una stanza parallelepipeda — produce nell'immagine un fascio di rette concorrenti in un punto. Era nata la geometria proiettiva, seppure inizialmente soltanto come prassi di «buon disegno» architettonico.

Le note che seguono intendono presentare alcuni risultati d'inversione della proiezione prospettica nella «Flagellazione di Cristo» di Piero della Francesca (fig. 3). Lo studio, svolto in collaborazione fra storici dell'arte, informatici e matematici, è stato promosso e condotto nell'ambito del Centro di Ricerche Informatiche per i Beni Culturali (CRIBECU) della Suola Normale Superiore di Pisa, prendendo le mosse in occasione del centenario della morte di Piero.

La scelta della Flagellazione come laboratorio d'esperimento ha avuto diverse motivazioni. Innanzi tutto, non è noto il disegno preparatorio del dipinto e dunque la ricerca aveva il sapore della scoperta. Poi, Piero fa uso assai parsimonioso della prospettiva come protagonista nelle sue opere (solo l'Annunciazione e, in modo diverso, la Pala di Brera, presentano prospettive paragonabili a quelle della Flagellazione) e la prassi prospettica era ancora abbastanza giovane da soddisfare le esigenze espressive dei pittori senza indurli a ricercarne le alterazioni. Infine, Piero non era solo un sommo pittore prospettico: era anche un matematico! Ciò è attestato non tanto dal trattato di prospettiva, che sarebbe certo «di parte», o dal trattatello

Figura 3. – «La Flagellazione di Cristo» di Piero della Francesca.

sui solidi platonici, che potrebbe ancora essere una curiosità da pittore colto, ma soprattutto dal trattato di abaco (algebra), inequivocabile testimonianza di interesse, gusto e formazione matematici. Era dei «nostri», e dunque poteva avere il gusto di dipingere una scena «correttamente» anche soltanto per dimostrare in pratica l'efficacia della propria teoria prospettica.

Dunque, *l'ipotesi fondamentale alla base di questo lavoro è quella di correttezza matematica, ossia d'assenza di alterazioni intenzionali, nella prospettiva dell'opera.*

Nel prossimo paragrafo verranno presentati pochi casi importanti, nei quali è possibile l'inversione della proiezione prospettica: il caso del piano di terra, o in generale quello dell'inversione di una proiezione fra piani noti, ed il caso di segmenti di lunghezza od orientamento noti.

Nel paragrafo seguente verrà mostrato quale senso possano avere e come sia possibile desumere dal disegno gli importanti parametri geometrici della distanza dal dipinto e dell'altezza sul piano di terra del punto d'osservazione, la conoscenza dei quali permette di ottenere un modello tridimensionale di varie parti dell'opera.

Nel paragrafo successivo, il modello spaziale ottenuto è visualizzato in proiezioni ortogonali e oblique.

Nell'ultimo paragrafo verranno presentati alcuni problemi incontrati durante lo svolgimento di questo studio, che hanno richiesto alla matematica impiegata per risolverli un balzo in avanti, passando dal teorema di Talete e dalla geometria proiettiva alla geometria differenziale di Gauss.

L'autore, infine, si scusa per la povertà di dettagli sugli aspetti informatici dello studio presentato. La pubblicità filistea, così frequente al giorno d'oggi, soprattutto al di fuori dell'ambiente accademico, sulla presunta prevalenza dell'informatica su qualunque altra forma di sapere e di cultura, ancorché irritante e criminale per la storia del pensiero di qualunque nazione moderna, non deve però far dimenticare che da sempre, dalla costruzione della bomba atomica e dall'ENIAC di von Neumann in poi, il ruolo del computer come servitore stupido, ma preciso e velocissimo, è insostituibile.

La restituzione delle immagini presentate, ottenuta invertendo punto per punto la prospettiva, non sarebbe stata praticamente attuabile senza calcolatore! La mancanza di spazio e l'insospettabile abbondanza di problemi informatici, e non un'altrettanto filistea ostilità verso il computer, costringono l'autore a non potersi soffermare su di essi.

1. – L'inversione della prospettiva: alcuni casi particolari.

Pur non potendosi, in generale, invertire la prospettiva, esistono alcuni casi di particolare rilevanza nel disegno architettonico nei quali ciò è possibile.

Il primo è quello del piano di terra. È evidente che se, invece di considerare tutto lo spazio, ci si limita a considerare solo i punti di un piano noto e non contenente il centro di proiezione, detto anche punto di vista, l'inversione è non solo possibile, ma anche banale: basta condurre la retta per il centro di proiezione e per il punto dell'immagine del quale si vuole determinare la provenienza, e determinare l'intersezione, quando esista, fra tale retta e il piano noto di partenza (fig. 4).

Si vedrà più avanti che, più di altri, il piano di terra si presta ad attuare tale costruzione. *Nel seguito si supporrà che il piano del dipinto sia verticale e che il piano reale del pavimento rappresentato sia orizzontale. Con H e D verranno denotate le distanze del punto di osservazione rispettivamente dal piano del dipinto e da quello di terra* (*fig.* 4).

Tale ipotesi esclude gli effetti d'alterazione prospettica dovuti al-

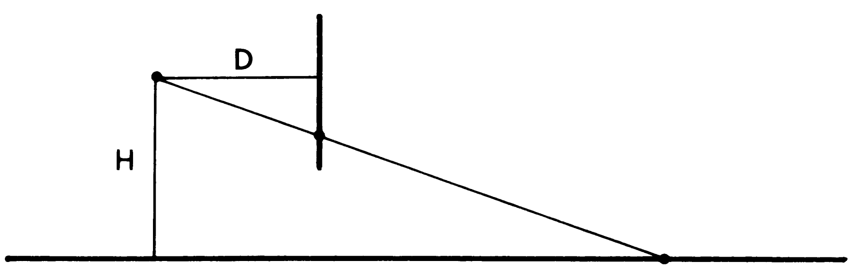

Figura 4. – Inversione della prospettiva per il piano di terra, in sezione.

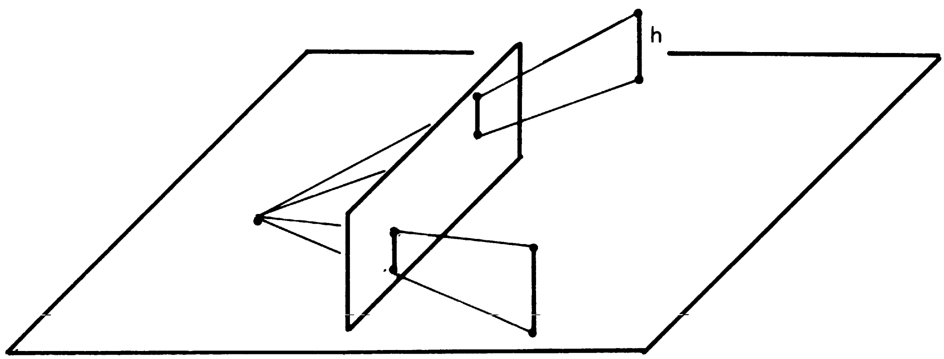

Figura 5. – Restituzione spaziale di segmenti verticali appoggiati a terra o di lunghezza nota.

l'inclinazione del piano reale di terra, come quelli utilizzati nel Teatro Olimpico, prima menzionato.

Note o in qualche modo determinate H e D, per ogni punto che rappresenta un punto del pavimento sarà possibile ricostruire la sua posizione reale e, punto per punto, restituire così la pianta della porzione visibile del piano di terra.

Un secondo caso favorevole, conseguente al primo, è costituito dai segmenti verticali per i quali è rappresentato nel dipinto il punto d'appoggio a terra. In tal caso si può determinare il punto d'appoggio reale con la tecnica precedente e utilizzare l'informazione sull'orientamento verticale, ricavando l'altro estremo per intersezione con la verticale sul punto d'appoggio (fig. 5). Dunque, gli oggetti verticali e appoggiati a terra in un punto visibile sul dipinto possono essere restituiti in modo univoco, assimilandoli a segmenti.

Un ultimo caso riguarda gli oggetti di misura e orientamento noti: se una finestra, supposta a stipiti verticali e parallela al dipinto, fosse di altezza h nota, allora la sua distanza reale, e di conseguenza la sua posizione (fig. 5), potrebbe essere ricavata per similitudine (Talete), in quanto l'oggetto e la sua immagine sulla tavola sono paralleli e tagliati da due trasversali — i raggi uscenti dal punto di vista condotti per gli estremi dell'oggetto — e la misura dell'immagine può determinarsi per confronto con le misure reali del dipinto.

Prima di procedere oltre con la determinazione di H e D a partire dal disegno stesso, è bene precisare una volta di più che tutta la ricostruzione che segue poggia sulle ipotesi precedenti di orientamento «non fraudolento» del piano orizzontale, delle rette verticali e del piano del dipinto, perpendicolare al piano di terra e parallelo al «piano di fondo» degli ambienti dipinti: sono queste le «convenzioni non scritte» fra il pittore e lo spettatore senza le quali non si può eludere il paradosso della «stanza di Ames», vanificando l'esercizio stesso della prospettiva intesa come suggestione pittorica dello spazio.

2. – Determinazione della distanza dell'osservatore dal piano di terra e dal dipinto.

La Flagellazione mostra un meraviglioso ambiente architettonico sulla sinistra. *Supporremo che tale ambiente sia parallelepipedo, con due facce orizzontali, due parallele e due perpendicolari al piano del dipinto, così come supporremo «regolare», ossia a modulo rettangolare, tanto la pavimentazione quanto la geometria dei cassettoni del soffitto.* Dunque, molte rette del pavimento e del soffitto sono in realtà supposte parallele.

È noto dalla geometria proiettiva, o molto più semplicemente ancora dalla similitudine, che le immagini di un fascio di rette parallele fra loro, ossia le loro proiezioni da un punto su un piano, formano un fascio di rette incidenti in un punto, se il fascio stesso non è parallelo al piano di proiezione. Le ipotesi di orientamento dell'ambiente permettono di individuare due fasci notevoli paralleli al piano del dipinto: quello delle rette orizzontali e quello delle rette verticali. Ne individuano anche un altro, ancora più importante: quello delle rette perpendicolari al piano del dipinto, delle quali sono ricchissimi soffitto e pavimento. È semplicissimo tracciare il fascio immagine di tali rette, alcune delle quali sono mostrate a lato (fig. 6).

Fra le rette perpendicolari al dipinto, tutte le immagini delle quali sono concorrenti in un punto detto punto di fuga, ce n'è una particolare: quella condotta a partire dal punto di vista. Poiché le rette del fascio sono parallele al piano di terra, il punto di fuga si trova alla stessa altezza H sul piano di terra del punto di vista. Ne segue che

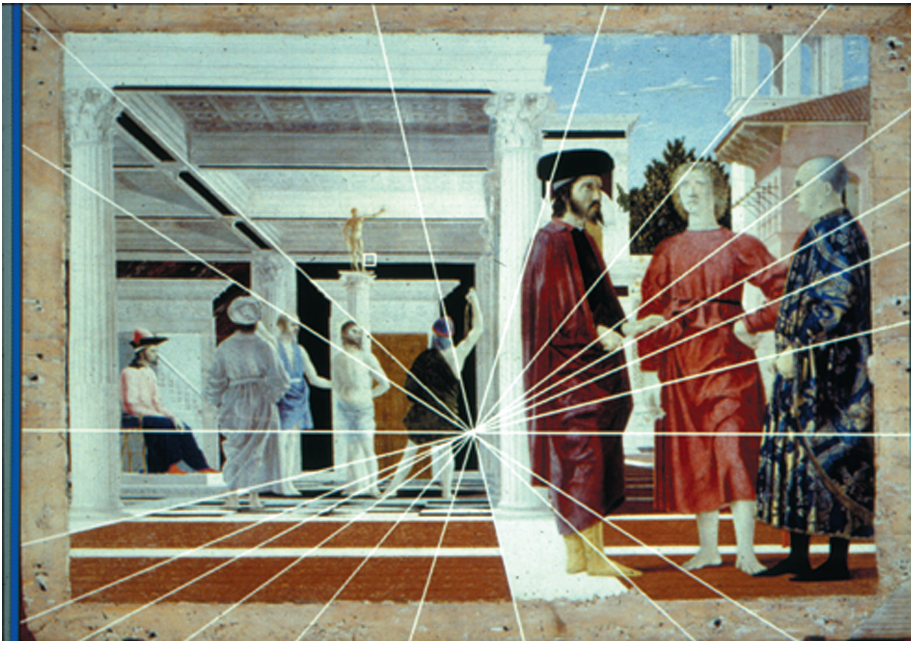

Figura 6. – Costruzione del punto di fuga e dell'orizzonte.

il piano orizzontale ad altezza H, proiettato dal punto di vista che gli appartiene, produrrà per immagine la retta intersezione fra il piano stesso e il piano del dipinto. Dunque, la retta orizzontale condotta sul piano del dipinto per il punto di fuga (fig. 6), ricavato in precedenza, è il luogo delle immagini di tutti i punti dello spazio che si trovano alla stessa altezza da terra dell'occhio dell'osservatore; tale retta è nota col nome di linea d'orizzonte. Ciò può apparire irrilevante, ma una semplice osservazione del dipinto (fig. 6) mostra numerose figure umane, sulle misure delle quali si possono formulare ipotesi ragionevoli, intersecate dalla linea d'orizzonte all'altezza del ginocchio: una semplice proporzione permette di determinare H, così come Piero l'ha pensata. Un ulteriore fondamentale contributo è giunto dagli Storici dell'Arte: *i trattati dell'epoca*, come quello di Leon Battista Alberti, *fissano la misura della figura umana dipinta («misura di tutte le cose») in modo rigido: tre braccia fiorentine.* Tale misura corrisponde all'incirca a cm. 177, il che fornisce per il piano d'orizzonte un'altezza di cm. 59, insolitamente ridotta, per giustificare il valore della quale molto è stato scritto.

La proprietà della «convergenza dei fasci immagine» permette di risolvere anche l'altro problema: la determinazione della distanza D dell'osservatore dal dipinto.

Si determini, sulla linea d'orizzonte, un punto distante dal punto di fuga tanto quanto l'osservatore: tradizionalmente è detto punto di distanza. Il punto di vista, quello di fuga e quello di distanza formano un triangolo isoscele rettangolo, con i cateti uno sul piano del dipinto e l'altro perpendicolare ad esso, entrambi orizzontali. L'ipotenusa è dunque orizzontale e forma un mezzo angolo retto con l'orizzonte. Tutte le rette ad essa parallele producono dunque rette immagini concorrenti nel punto di distanza prima definito.

Il dipinto contiene simili rette immagini? Si è già supposto che il modulo della pavimentazione sia rettangolare. Se fosse anche quadrato, la diagonale appropriata di ogni modulo, sia esso mattonella o cassettone, sarebbe parallela all'ipotenusa prima definita, e la sua immagine intersecherebbe la linea d'orizzonte nel punto di distanza. Una volta individuata sul dipinto l'immagine di un quadrato «ben orientato», si può prolungarne la diagonale fino ad intersecare la linea d'orizzonte, determinando così il punto di distanza, e ricavare il valore D misurando sull'immagine la sua distanza dal punto di fuga (fig. 7).

Nulla vieta di assumere che Piero abbia adottato un modulo qua-

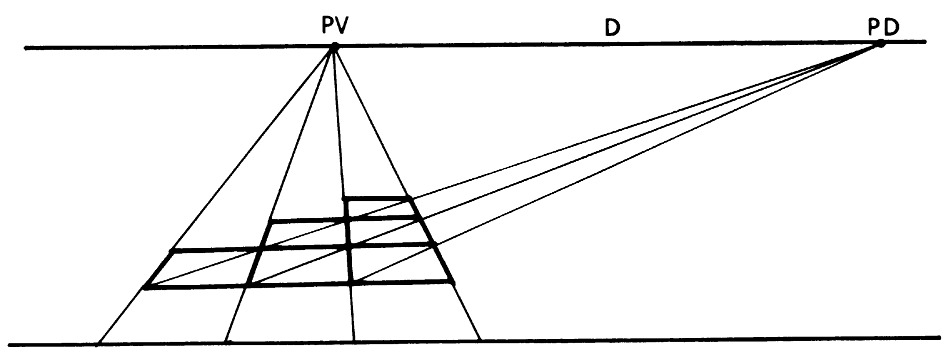

Figura 7. – Costruzione del punto di distanza (PD), nota l'immagine di un pavimento a modulo quadrato.

drato per la pavimentazione, ma nulla, dal punto di vista matematico, obbliga a pensare che lo abbia effettivamente fatto. Ancora una volta un aiuto proviene dalla Storia dell'Arte: la decorazione del pavimento attorno alla colonna con il Cristo presenta un motivo tondeggiante di marmo scuro. La sua restituzione in pianta, ottenuta con le tecniche precedenti, è un'ellisse, che diviene un cerchio solo se si assume che il rettangolo ad esso circoscritto sia un quadrato. Nessuno Storico dell'Arte ha il minimo dubbio sull'inconsistenza di una decorazione ellittica nel tardo Quattrocento. Inoltre le tavole del Trattato mostrano solo esempi di prospettive di pavimenti a modulo quadrato. Dunque, si supporrà che *il quadrilatero del pavimento circoscritto al tondo che circonda la colonna della flagellazione sia immagine di un quadrato.*

Il valore numerico «reale» della distanza, ricavato direttamente per confronto con le misure note della tavola dipinta, vale approssimativamente cm 145.

A titolo di curiosità si può osservare che il caso considerato è il più difficile da trattare: se la stanza parallelepipeda fosse ruotata nello spazio, in modo che tutti i suoi spigoli fossero non paralleli al piano del dipinto sarebbe allora immediato determinare la posizione del punto d'osservazione, senza altre ipotesi. Dati i punti di fuga dei tre fasci paralleli agli spigoli sul piano del dipinto, il punto di vista è l'unico punto del semispazio «giusto» nel quale le rette condotte per i punti di fuga s'intersecano a due a due ortogonalmente.

Il caso interessante, non infrequente nei dipinti di «Città Ideali», degli edifici parallelepipedi ruotati di mezzo angolo retto o di un altro angolo noto, nel quale solo gli spigoli verticali mantengono il parallelismo sul piano dell'immagine, è in qualche modo intermedio: richiede solo la determinazione dell'altezza H.

Prima di esaminare i risultati, un brevissimo cenno ad alcuni problemi applicativi. La maggiore croce è stata quella della definizione delle sagome dei piani notevoli, dei personaggi e delle rette, che sono state sì tracciate da Piero con mirabile precisione, ma pur sempre con un pennello. Ciò ha richiesto l'acquisizione di un gran numero di punti, con gran dispendio di tempo. Per le rette «pittoriche», a tale acquisizione massiccia di punti ha fatto seguito la loro elaborazione numerica con il metodo dei minimi quadrati per ottenere le rette matematiche «ottimali» corrispondenti.

Inoltre, la struttura stessa delle immagini digitali, per le quali i «punti», ossia i pixel (picture element) sono in realtà costituiti da quadratini, rende inutilizzabili i «segmenti» troppo corti, perché le elaborazioni precedenti presenterebbero errore intrinseco troppo elevato.

Altri tipi di problemi, più squisitamente informatici, scaturiscono dalla dimensione dell'immagine da gestire, che per alcune elaborazioni ha raggiunto all'incirca i 60 Mbyte, anche se le potenzialità sempre crescenti delle macchine disponibili li rendono oggi molto meno ostici di quanto non lo siano stati qualche anno fa.

3. – Lo spazio nella Flagellazione: una proposta.

Nella figura 8 viene presentato il modello della pianta dello scenario della Flagellazione, ottenuta enucleando dal dipinto la porzione che rappresenta il piano di terra e invertendo la prospettiva punto per punto. Gli elementi in primo piano occultano porzioni più o meno estese del pavimento, la restituzione delle quali è ovviamente impossibile.

È importante osservare che l'applicazione prospettica è fortemente non lineare rispetto alla distanza: uno spostamento di un punto sull'immagine del pavimento verso la linea d'orizzonte corrisponde al tendere all'infinito del punto reale corrispondente. In particolare, è la piccola porzione di pavimento visibile fra gli abiti dei notabili a produrre la lunga striscia visibile in pianta. È dunque inevitabile un forte deterioramento dell'immagine in corrispondenza ai

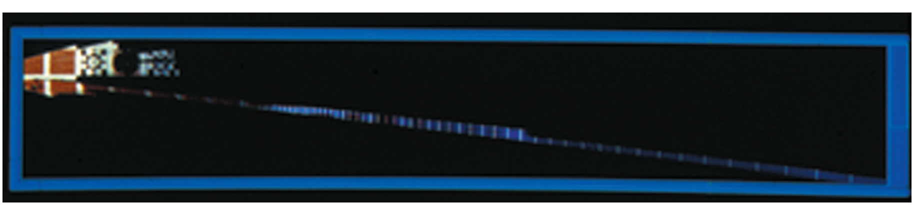

Figura 8. – Il piano di terra, in pianta.

punti più vicini alla linea d'orizzonte. Ad aggravare ulteriormente la situazione c'è la rappresentazione digitale: le righe visibili nella ricostruzione corrispondono alle righe mediante le quali è rappresentata l'immagine, perfettamente adeguate per la visualizzazione del dipinto ma grossolanamente inadeguate per quella del modello spaziale. Le molte «soluzioni» che si dicono applicabili in tali situazioni hanno carattere palliativo, o meglio «decorativo», e servono solo a nascondere la reale mancanza d'informazione inerente alla rappresentazione digitale.

La scelta di questa ricerca, coerente sin dalle fasi iniziali, è stata

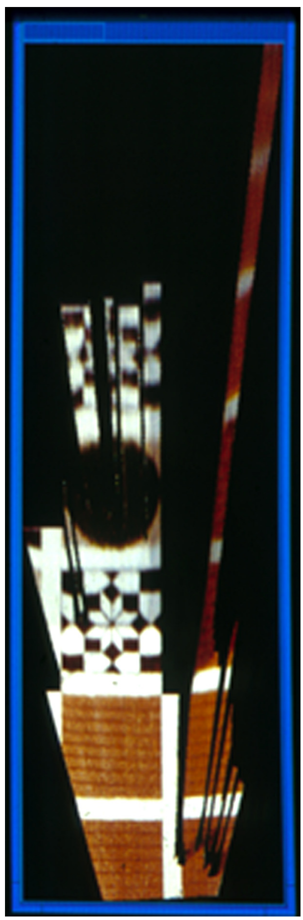

Figura 9. – Il dettaglio del Pretorio, in pianta.

di non indulgere minimamente alle tentazioni di realizzare «realtà virtuali», oggi molto di moda, a spese della correttezza: le immagini ottenute contengono solo ciò che Piero ha dipinto, seppure mediato dalla digitalizzazione, senza integrazioni di sorta.

La figura 9 contiene il dettaglio della pianta del Pretorio, sufficientemente «lontano dall'orizzonte» da fornire immagini leggibili, impressionanti per la precisione che Piero è riuscito ad ottenere dal suo pennello, pur in un dipinto di modeste dimensioni e non immaginando di certo a quali angherie analitiche il suo disegno sarebbe stato sottoposto qualche secolo più tardi. Osserviamo incidentalmente che l'esame dei colori indica come più corretta la ricostruzione già proposta in passato da Casalini, che prevede la pavimentazione del Pretorio decorata a scacchiera con tondi e motivi geometrici «a stella», piuttosto che quella di Wittkower e Carter, che prevedeva solo motivi geometrici ad eccezione dell'unico tondo attorno alla colonna.

La figura 10, che ha suscitato particolare interesse fra gli Storici dell'Arte, contiene «l'alzato», ossia la proiezione ortogonale su un piano verticale parallelo al dipinto, dello scenario architettonico integrato con le figure umane; il loro posizionamento è stato realizzato enucleando dal dipinto la sagoma di ogni personaggio, *considerandola piana, verticale e parallela al piano del dipinto*, e situandola nel modello mediante la tecnica illustrata nel paragrafo precedente

Figura 10. – «L'alzato» (proiezione verticale) delle figure umane.

Figura 11. – Lo spazio nella Flagellazione in assonometria cavaliera.

a proposito di oggetti il punto d'appoggio dei quali sia noto, quasi fosse la quinta di un teatro. I risultati confermano il punto di vista dell'Alberti sulla «costanza» della misura umana; l'unica eccezione, il flagellatore di sinistra, ad un esame attento sulle immagini ad alta risoluzione, sembra essere... in punta di piedi, nell'atto di colpire!

In figura 11 è presentata una proiezione obliqua di Cavalieri («assonometria cavaliera») del modello prima definito del Pretorio.

È immediato osservare che mentre la parte sinistra dell'opera è ricca di informazioni utili per la sua ricostruzione prospettica, la parte destra ne è avarissima: con l'unica eccezione dei tre notabili e della piccola porzione di muro di fondo a mosaico, nessun altro elemento può essere posizionato con le tecniche precedenti senza ulteriori ipotesi. Nulla vieta, ovviamente, di fissare una misura «sensata» per le finestre dell'edificio medievale o per l'arco della torre, o ancora per le foglie dell'albero, e dedurne di conseguenza la distanza dall'osservatore. Tali ipotesi sono apparse però viziate da elementi d'arbitrio in misura ben maggiore rispetto a quelle sul modulo quadrato del pavimento o sull'altezza «canonica» della figura umana dipinta, assunte in precedenza.

Gli Storici dell'Arte, che già per due volte avevano salvato il carattere «scientifico» di questo divertimento geometrico, messi a parte delle difficoltà collegate all'elaborazione della parte destra del dipinto, non mostrarono alcuno stupore; per loro è evidente, nell'impianto della Flagellazione, la volontà di Piero di differenziare fortemente le due metà dell'opera: dall'architettura degli edifici agli abiti dei personaggi, tutto denota un differente intendimento espressivo. Nulla d'insolito dunque, dal punto di vista storico-artistico, nel fatto che anche l'impianto prospettico denunci tale volontà.

Molto è stato tentato per aggirare questa difficoltà, dall'esame delle lunghezze reali dei porta-stendardi e degli aggetti di gronda all'adozione, per l'edificio medievale, delle proporzioni di quello presente sulle tavole del Trattato, invero molto simile, ma senza approdare a nulla di veramente convincente. Forse è opportuno, e non solo comodo, rammentare che la prospettiva era uno strumento di pittura e non di riproduzione fotografica: l'albero sullo sfondo potrebbe forse rivestire soltanto la funzione di incorniciare di scuro la testa del giovane biondo in primo piano, senza alcuna rilevanza prospettico-architettonica!

4. – Problemi aperti.

Il lettore attento si sarà certamente insospettito per il carattere quantomeno reticente di queste note sui valori numerici delle misure del Pretorio, della piazza, o di altri elementi.

La ragione va ricercata in un fatto assai irritante: nella costruzione del punto di distanza, illustrata in precedenza, è ovviamente in-differente quale delle due diagonali del quadrato venga adoperata per la costruzione e la determinazione di D. È stato quindi piuttosto sorprendente, e per l'appunto assai irritante, lo scoprire come i valori corrispondenti alle due possibili costruzioni siano diversi in modo significativo.

Dopo qualche mese di lavoro a vuoto per migliorare il meccanismo di acquisizione delle rette, ritenuto responsabile del misfatto, fu decisa una visita al museo d'Urbino per vedere di persona la Flagellazione, per puro scopo ricreativo. Il premio per la gita fu una scoperta che poteva fornire una spiegazione «fisiologica» dell'anomalia riscontrata: la tavola del dipinto è notevolmente e irregolarmente deformata, «imbarcata» soprattutto agli angoli, fatto davvero non inusuale per una tavola di legno di cinque secoli! Ne segue che il rilievo fotografico accuratissimo utilizzato per lo studio non corrisponde che approssimativamente al disegno originale di Piero.

L'autore ritiene che la presenza di simili errori a livello strutturale nel rilievo motivi a sufficienza il carattere, prudente per un verso e «ricreativo» per l'altro, dato a queste poche note. Di sicuro, è un atteggiamento matematicamente più corretto di quello caratteristico di tante ricerche sui rapporti notevoli di misure, quali pi greco o la sezione aurea o ancora la radice di 2, condotte sì autorevolmente, ma su fotografie e ignorando del tutto gli effetti di tali deformazioni. Nulla vieta al lettore interessato di applicare le tecniche sin qui esposte ad un'immagine fotografica della scena da rilevare, contenente un triedro di riferimento: due lati del quadrato di base più lo spigolo verticale concorrente di lunghezza nota, orientato con la (mezza) faccia verticale parallela al piano della pellicola. I risultati sarebbero in tal caso più corretti ed affidabili, pur se con precisione decrescente al crescere della distanza, e sempre che l'obiettivo fotografico abbia distorsione accettabilmente ridotta.

In conclusione, un breve accenno ad una linea di sviluppo che è stata seguita per aggirare il problema della deformazione, che potrebbe essere di qualche interesse geometrico. Essa è alternativa a quella che Piero avrebbe forse seguita: porre un foglio aderente sull'opera e riportarvi il disegno voluto, realizzando così una sinopia. Viste le difficoltà incontrate con la sovrintendenza durante la visita alla quale si faceva cenno prima, tale tecnica antica ed efficace appare oggi impraticabile.

Si supponga dunque di disporre non solo di un rilievo fotografico, ma di uno fotogrammetrico, ossia di un modello tridimensionale completo della tavola. Un buon modello astratto potrebbe essere una funzione definita sull'immagine fotografica della tavola, e a valori in un insieme di vettori le componenti dei quali siano l'altezza del punto su di un piano di riferimento, e le tre intensità del rosso, del verde e del blu corrispondenti al colore della tavola nel punto fissato. È possibile restituire un modello piano del disegno originale nota la sua deformazione nello spazio? La risposta è stata fornita da C.F.Gauss nel teorema che egli stesso denominò «egregium»: il criterio fondamentale perché una porzione di superficie sia deformabile in modo isometrico in un'altra è l'identità delle loro curvature gaussiane nei punti corrispondenti. È ben noto a tutti che un cilindro o un cono possono essere ottenuti facilmente piegando un foglio di carta, mentre non è possibile ottenere così una sfera. Ciò dipende dal fatto che il piano, il cilindro e il cono hanno la stessa curvatura gaussiana mentre quella della sfera è diversa!

Ha senso supporre che la deformazione della tavola sia isometrica? Forse sì, perché se così non fosse la vernice del dipinto avrebbe dovuto presentare lacune dovunque le lunghezze si fossero dilatate e delle piegature o dei danni nelle parti interessate da contrazione! E se invece la deformazione fosse stata così lenta da permettere alla vernice di deformarsi senza danni? Beh, in tal caso non c'è più speranza, neanche con la sinopia: il disegno è irrimediabilmente modificato!

Supposto dunque l'inevitabile, — che *la superficie del dipinto abbia curvatura totale (gaussiana) identicamente nulla* come il piano — come restituire l'immagine del dipinto originale? La deformazione di un rettangolo piano nella superficie trasforma tutte le rette del piano in una famiglia di curve sulla superficie dette geodetiche, che conservano la fondamentale proprietà delle rette di essere il più breve cammino fra le coppie di punti che esse congiungono, almeno quando essi sono abbastanza vicini. Un'altra notevole proprietà è che un punto materiale libero di muoversi sulla superficie, ma vincolato a stare su di essa, in assenza di forze esterne, si muove per geodetiche.

Si può allora tracciare una geodetica sulla superficie, che funga da asse x, e da un suo punto, l'origine, condurne un'altra che nell'istante iniziale sia ortogonale a quella di partenza, che sarà l'asse y. Man mano che la geodetica «asse x» viene percorsa sulla superficie, si può prendere nota dei punti per i quali passa, riportando sull'asse x del piano immagine un punto di uguale colore ad un'ascissa uguale alla lunghezza percorsa sulla geodetica dall'origine fino al punto in esame. Ripetendo questa operazione per un fascio di geodetiche tracciate sulla superficie ad intervalli regolari di lunghezza percorsa sulla geodetica «asse y», e tutte inizialmente ortogonali ad essa, si può ricoprire la superficie di geodetiche le immagini delle quali saranno rette nel piano immagine; su di esse verranno «ricopiati» i colori incontrati, nei punti di ascissa uguale alla lunghezza dell'arco di geodetica percorso a partire dalla geodetica «asse y».

Aldilà dei problemi d'analisi numerica che ciò comporta, ci si può interrogare sul ruolo dell'ipotesi sulla curvatura nulla in questa costruzione. Essa assicura che le immagini di una qualunque coppia di geodetiche che s'intersecano ortogonalmente in un punto è costituita da due rette ortogonali. Dunque, l'immagine di un reticolo ortogonale di geodetiche è un reticolo cartesiano ortogonale. È ben noto quanto possano essere diverse le cose per il reticolo geografico su una sfera, sulla quale le geodetiche sono i cerchi massimi: ad esempio, i punti della sfera unitaria aventi tutte le coordinate positive formano un «triangolo» con tre angoli retti!

Nell'ultima figura (fig. 13) è presentato il risultato di tale costruzione su un'immagine a bassa risoluzione ottenuta deformando al calcolatore un modello, che per vezzo è anch'esso celebre, su di un cilindro (fig. 12).

Al momento, non risulta disponibile un rilievo tridimensionale di sufficiente precisione della tavola della Flagellazione. L'autore deve quindi fermarsi qui, e dichiara con preoccupazione di ignorare se la restituzione piana del disegno deformato potrà eliminare o meno l'anomalia dei due punti di distanza non equidistanti dalla fuga principale. Il problema non è comunque limitato alla sola Flagellazione. Anche l'An-

Figura 12. – Dipinto su cilindro.

nunciazione, altro meraviglioso esempio di prospettiva protagonista in un'opera di Piero, presenta deformazioni tutt'altro che trascurabili. Qualunque progetto d'analisi geometrica, e non solo prospettica, delle opere d'arte su tavola a partire dai loro rilievi fotografici dovrà affrontare preventivamente questo spinoso problema.

Un'ultima osservazione: la scelta di Piero della Francesca come fonte di materiale di studio è stata particolarmente felice: da prove condotte sulle otto tavolette dell'oratorio di San Bernardino di Perugia, attribuite ad autori diversi e di diversa levatura, risulta che l'im-

Figura 13. – Restituzione piana.

pianto prospettico si mantiene pressoché costante nei vari scenari, avvalorando l'ipotesi, avanzata in ambiente storico-artistico, di un unico «disegnatore tecnico» che possa aver prestato la sua opera a tutti i pittori, senza preoccuparsi troppo dell'originalità o del realismo delle sue invenzioni.

È poi poco significativo effettuare la restituzione tridimensionale in opere di molto posteriori all'età di Piero, realizzate quando la prospettiva rigorosa aveva già perso il suo carattere di novità teorica ed espressiva, e nelle quali sono frequenti alterazioni intenzionali della prospettiva fra le varie parti del dipinto, a meno di non avere solidi argomenti per poterle escludere a priori, o di limitare la restituzione alle porzioni ritenute prospetticamente coerenti.

Chi volesse infine riesaminare tutte le ipotesi geometriche alla base dei risultati ottenuti per meglio valutarle, potrà ritrovarle evidenziate in corsivo nel testo.

Per concludere, l'autore ha trovato motivo di stupore nel vedere con quanta poca buona geometria (teorema di Talete, proprietà del fascio immagine di parallele, proprietà delle geodetiche, senza contare un po' di calcolo vettoriale, di geometria analitica e d'analisi numerica sul versante informatico del lavoro), sia stato possibile affrontare e risolvere problemi di carattere squisitamente applicativo.

Alla luce di tutto ciò — in quest'epoca triste di smantellamento della matematica nelle facoltà tecnologiche, fatto che lungi dall'essere una necessità, è invece solo il risultato della criminale scelta anticulturale di importare anche la ricerca avanzata dall'estero, come si fa già per i medicinali, i cellulari, i computer, le macchine fotografiche ed i lettori di CD — vale forse la pena di ricordare una frase che può offrire conforto a coloro i quali credono ancora che all'Università si debba andare per capire come stanno le cose e per crearne di nuove, e non per imparare come acquistare e vendere su Internet i prodotti o i titoli azionari degli altri, e che l'autore riporta come attribuita a L. Boltzmann:

«Nulla è più pratico di una buona teoria».

Ringraziamenti. L'autore non può qui ricordare e ringraziare adeguatamente tutti quanti abbiano in qualche modo contribuito ad ottenere questi risultati, ma non vuole concludere senza un pensiero grato agli amici che, più di altri, hanno condiviso i momenti difficili e quelli entusiasmanti di questa ricerca sobbarcandosi, in varie epoche, a compiere il duro lavoro di programmare gli algoritmi fino ad ottenere le immagini: Ilaria Campanari, Maria Grazia Pepe e Massimiliano Sartor. Un ringraziamento speciale va poi all'amico carissimo Umberto Parrini del CRIBECU della Scuola Normale, che l'ha animata sin dagli inizi, e ha dovuto spesso svolgere il difficile ruolo d'interfaccia fra l'anima «umanistica» e quella «scientifica» di questa ricerca.

BIBLIOGRAFIA

PIERO DELLA FRANCESCA: *De Prospectiva Pingendi*, ed. crit. a cura di G. Nicco-Fasola, ed. «Le Lettere», Firenze.

Dipartimento di Matematica Applicata, via Diotisalvi 2, 56100 Pisa