Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Umberto De Maio

Omogeneizzazione di funzionali superiormente non limitati

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 91–94.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_91_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 91-94

Omogeneizzazione di funzionali superiormente non limitati.

UMBERTO DE MAIO

I materiali compositi (fibre, stratificati, porosi) giocano un ruolo importante in molte branche della Meccanica, della Fisica e dell'Ingegneria. In questi materiali i parametri fisici (come conduttività, coefficiente di elasticità) oscillano tra i diversi valori che caratterizzano ciascuna delle componenti. Quando queste componenti sono ben mescolate, questi parametri oscillano molto rapidamente e la struttura microscopica diventa complicata. D'altra parte noi possiamo pensare di avere una buona approssimazione del comportamento macroscopico di tale materiale eterogeneo mandando a zero, nelle equazioni che descrivono dei fenomeni quali la conduzione del calore, elasticità, ecc., il parametro ε che descrive la finezza della struttura microscopica. Questa analisi di convergenza è collegata al cosiddetto problema di omogeneizzazione, vale a dire il problema di individuare un materiale omogeneo, la cui risposta complessiva sia «vicina» a quella del materiale composito.

Più esattamente, con tecniche legate alla Γ-convergenza, si analizzano questioni di omogeneizzazione legate a problemi di elastoplasticità, schematizzabili attraverso la minimizzazione di funzionali su insiemi di funzioni assoggettate a vincoli sul gradiente, e problemi di elettrostatica in presenza di conduttori «sottili» diffusi nel mezzo, schematizzabili anch'essi attraverso le minimizzazioni di funzionali su insiemi di funzioni assoggettate ad essere costanti su certe zone (e dunque a vincoli del tipo gradiente nullo, ma in un senso cosiddetto esteso).

Nella tesi si analizza il comportamento asintotico al divergere di $h \in N$ per ogni sottoinsieme aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ e $\beta \in L^\infty(\Omega)$ delle soluzioni del problema

$$m_h(\Omega, \beta) = min \left\{ \int_\Omega f(hx, u, Du)\, dx + \int_\Omega \beta u\, dx : u \text{ Lipschitziana}, \right.$$

$$\left. u = 0 \text{ su } \partial\Omega,\ |Du(x)| \le \varphi(hx), \text{ per q.o. } x \text{ in } \Omega \right\}, \quad h \in N$$

Si prova, con opportune ipotesi per f e φ che se $\{u_h\}$ con $h \in N$ è una successione di soluzioni del problema precedente, essa è compatta in C_0^0 e che le sottosuccessioni convergenti di $\{u_h\}$ convergono alle soluzioni del problema

$$m_\infty(\Omega, \beta) = \min \left\{ \int_\Omega f_\infty(u, Du)\, dx + \int_\Omega \beta u\, dx : u \text{ Lipschitziana}, \right.$$

$$\left. u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \text{ per q.o. } x \text{ in } \Omega \right\},$$

dove f_∞ è definita come

$$f_\infty : z \in \mathbb{R}^n \to \min \left\{ \int_Y f(y,\, s,\, z + Dv) : v \text{ Lipschitziana, } vY\textit{-periodica}, \right.$$

$$\left. |z + Dv(y)| \leqslant \varphi(y), \text{ per q.o. } x \text{ in } \Omega \right\}$$

(dove si è assunto nell'ultima uguaglianza $Y =]0,\, 1[^n$ e $\min \emptyset = +\infty$).

Il problema esaminato è connesso alla questione dell'omogeneizzazione di problemi di elastoplasticità per sbarre.

Un altro problema esaminato è lo studio del comportamento asintotico dei seguenti problemi di Dirichlet:

$$m_\varepsilon(\Omega,\, \beta) = \min \left\{ \int_\Omega f(x/\varepsilon,\, Du)\, dx + \int_\Omega \beta u\, dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\},$$

dove Ω è un sottoinsieme aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ $\beta \in L^\infty(\Omega)$ ed f una funzione verificante le seguenti condizioni

$$\begin{cases} f : (x,\, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to f(x,\, z) \in [0,\, +\infty] \\ f \; L_n \; B_n \text{ misurabile} \\ f\,(\cdot,\, z) \; Y\text{-periodica per ogni } z \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ f\,(x,\, \cdot) \text{ convessa e semicontinua inferiormente per q.o. } x \text{ in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

dove L_n e B_n denotano rispettivamente le σ-algebre di Lebesgue e Borel. Più precisamente, sia definita la funzione misurabile e Y-periodica φ da

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^n \to \sup\{ |z| : f(x,\, z) < +\infty \},$$

la funzione convessa

$$f_{\text{hom}} : z \in \mathbb{R}^n \to \inf \left\{ \int_Y f(y,\, z + Dv)\, dy : v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n),\ v\ Y\text{-periodica} \right\}$$

e l'insieme

$$\operatorname{dom} f_{\text{hom}} = \{ z \in \mathbb{R}^n : \text{esiste } v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \text{ e } Y\text{-periodica } f(\cdot,\, Dv)(\cdot) \in L^1(Y) \}.$$

Supponiamo che sia verificata una delle seguenti condizioni

(1) $\quad |z|^p \leqslant f(x,\, z)$ per q.o. x in $\mathbb{R}^n$, per ogni z in $\mathbb{R}^n$ e $p \in]1, +\infty[$

(2) $\quad \varphi \in L^p(Y), \quad p \in [1,\, +\infty]$

insieme con

(3) $$f(\cdot,\, 0) \in L^1(Y).$$

Si prova che:

i) se $(\mathrm{dom}\, f_{\mathrm{hom}})^0 \neq \emptyset$ allora

(4) $\quad 0 \in (\mathrm{dom}\, f_{\mathrm{hom}})^0$

(5) $\quad$ per ogni $z \in \mathrm{dom}\, f_{\mathrm{hom}}$ esiste $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\partial Y)$ tale che

v è Y-periodica e $f(\cdot, Dv(\cdot)) \in L^1(Y)$.

Se Ω è anche convesso, i valori in $m_\varepsilon(\Omega, \beta)$ convergono per ε che tende a zero, al valore finito $m_{\mathrm{hom}}(\Omega, \beta) = \min\left\{\int_\Omega f_{\mathrm{hom}}(Du)\, dx + \int_\Omega \beta u\, dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$.

Inoltre se $\{\varepsilon_h\}$ è una successione di numeri positivi convergente a zero e se, per ogni $h \in N$ u_h è una soluzione di $m_{\varepsilon_h}(\Omega, \beta)$ la successione $\{u_h\}$ è compatta in $L^p(\Omega)$ e le sottosuccessioni convergenti di $\{u_h\}$ convergono ai punti di minimo di $m_{\mathrm{hom}}(\Omega, \beta)$; se (2) vale, $\mathrm{dom}\, f_{\mathrm{hom}}$ è limitato e

$$m_{\mathrm{hom}}(\Omega,\beta) = \min\left\{\int_\Omega f_{\mathrm{hom}}(Du)\, dx + \int_\Omega \beta u\, dx : u \text{ Lipschitziana, } u = 0 \text{ su } \partial\Omega\right\}. \tag{6}$$

ii) Se $(\mathrm{dom}\, f_{\mathrm{hom}})^0 = \emptyset$ e se

$$f_{\mathrm{hom}}(0) = \inf\left\{\int_Y f(y, Dv)\, dy : v \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\} \tag{7}$$

allora $f_{\mathrm{hom}}(0) < +\infty$ e i valori $\{m_\varepsilon(\Omega, \beta)\}_{\varepsilon > 0}$ convergono, per ε che tende a zero, a $|\Omega| f_{\mathrm{hom}}(0)$. Inoltre se, per ogni $\varepsilon > 0$ u_ε è una soluzione di $m_\varepsilon(\Omega, \beta)$ la famiglia $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ converge a zero in $L^p(\Omega)$.

Infine si studia il comportamento asintotico per il seguente tipo di problemi:

$$m_h(\Omega, \beta, \alpha) = \inf\left\{\int_\Omega f(hx, Du)\, dx + \int_\Omega \beta u\, dx + \alpha \int_\Omega |u| : u \text{ Lipschitziana,}\right.$$
$$\left. u = \text{cost. su } S_h\right\}$$

dove S_h è l'insieme periodico ottenuto con $\frac{1}{h}$ Y-ripetizioni di S dove S è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ tale che $S \subseteq Y$ $\beta \in L^\infty(\Omega)$ $\alpha \in R$ con $\alpha > \|\beta\|_{L^\infty(\Omega)}$ ed f è una funzione che soddisfa

$$\begin{cases} f : (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to f(x, z) \in [0, +\infty[\\ f \text{ misurabile e } Y\text{-periodica nella variabile } x, \text{ convessa nella } z, \\ f(\cdot, z) \in L^1(Y) \quad \text{per ogni } z \text{ in } \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8}$$

Inoltre, si considera la funzione convessa data da

$$f_{\mathrm{hom}} : z \in \mathbb{R}^n \to \inf\left\{\int_Y f(y, z + Dv) : v \text{ Lipschitziana,}\right. \tag{9}$$
$$\left. v\ Y\text{-periodica, } zx + v = \text{cost. su } S\right\}$$

e l'insieme

$$\text{dom } f_{\text{hom}} = \{z \in \mathbb{R}^n \colon f_{\text{hom}}(z) < +\infty\}. \tag{10}$$

Più precisamente, si dimostra che se f soddisfa le (8) ed f_{hom} è data da (9) e valgono le seguenti ipotesi aggiuntive

$$0 \leq f(x, z) \leq a(x) + \omega(|z|) \tag{11}$$

$$|z| \leq f(x, z) \tag{12}$$

$$(\text{dom } f_{\text{hom}})^0 \neq \emptyset \tag{13}$$

dove $a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ è $]0, 1[^n$-periodica e $\omega : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ è una funzione Borel misurabile, non decrescente e limitata sugli insiemi limitati, allora f_{hom} risulta essere convessa, finita su $\mathbb{R}^n$ $|z| \leq f_{\text{hom}}(z)$ per ogni $z \in \mathbb{R}^n$ e per ogni sottoinsieme aperto e limitato Ω con frontiera Lipschitziana. In più, la successione $\{m_h(\Omega, \beta, \alpha)\}_{h \in N}$ converge a

$$i_\infty(\Omega, \beta, \alpha) = \min \left\{ \int_\Omega f_{\text{hom}}(\nabla u) + \int_\Omega f^\infty_{\text{hom}} \left(\frac{d(D^s u)}{d|Du|} \right) d|Du| + \int_\Omega \beta u \, dx + \alpha \int_\Omega |u| : u \in BV(\Omega) \right\},$$

dove f^∞_{hom} è la funzione di recessione di f_{hom}.

Il problema discusso è connesso all'omogeneizzazione di un mezzo nel quale siano presenti conduttori sottili.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carbone L., *Sur un problème d'homogeneisation avec des constraints sur le gradient*, J. Math. Pures Appl., 58 (1979), 275-297.

[2] Carbone L. and Salerno S., *On a problem of homogeneization with quickly oscillating constraints on the gradient*, J. Math. Anal. Appl., **90** (1982), 219-250.

[3] Dal Maso G., *An Introduction to Γ-Convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, Boston, 8 (1993).

[4] De Arcangelis R., Gaudiello A. and Paderni G., *Some cases of homogenization of linearly coercive gradient constrained variational problems*, M³AS **6**, n. 7 (1996), 901-940.

[5] De Arcangelis R. and Gargiulo G., *Homogenization of Integral Functionals with Linear Growth Defined on Vector-Valued Functions*, NODEA, **2** (1995), 371-416.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli»,
Università degli Studi di Napoli «Federico II»; e-mail: demaio@matna2.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli «Federico II») - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. Luciano Carbone,
Dip. di Matematica e Appl. «R. Caccioppoli», Università di Napoli «Federico II»