Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Sandro Coriasco

Operatori integrali di Fourier nelle classi SG con applicazioni ai problemi di Cauchy iperbolici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 87–90.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_87_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 87-90

Operatori integrali di Fourier nelle classi SG con applicazioni ai problemi di Cauchy iperbolici.

SANDRO CORIASCO

1. – Introduzione.

Si vuole studiare il problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{ll} Lu(t) = f(t) & t \in J,\, J = [T_0, T_1],\ T_0 < 0 < T_1 \\ D_t^k u(0) = g^k & k = 0, \ldots, \nu - 1 \end{array} \right. \tag{1}$$

per un operatore lineare a derivate parziali

$$L = D_t^\nu + P_1(t)\, D_t^{\nu - 1} + \ldots + P_\nu(t) \tag{2}$$

con

$$P_j(t) = P_j(t;\, x,\, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq j} c_{j\alpha}(t;\, x)\, D_x^\alpha \tag{3}$$

ove si è utilizzata la notazione

$$D_t = -i \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},\ D_x^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\, \partial_x^\alpha,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n,\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

È noto che, per $c_{j\alpha} \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1}_{t,\, x})$, condizione necessaria per la buona posizione in C^∞ (esistenza e unicità della soluzione per dati C^∞ arbitrari) è la (debole) iperbolicità (Mizohata [4]). Cioè, tutte le radici $\lambda_j(t;\, x,\, \xi)$, $j = 1, \ldots, \nu$, dell'equazione caratteristica di L

$$\mathrm{Sym}_\mathrm{p}(L)(t;\, x,\, \xi) = \lambda^\nu + q_1(t;\, x,\, \xi)\, \lambda^{\nu - 1} + \ldots + q_\nu(t;\, x,\, \xi) = 0\,, \tag{4}$$

$$q_j(t;\, x,\, \xi) = \mathrm{Sym}_\mathrm{p}(P_j)(t;\, x,\, \xi) = \sum_{|\alpha| = j} c_{j\alpha}(t;\, x)\, \xi^\alpha \tag{5}$$

devono essere reali. Se L è strettamente iperbolico, cioè le radici $\lambda_j(t;\, x,\, \xi)$ sono reali e distinte, allora abbiamo la buona posizione del problema in C^∞ e negli spazi di Sobolev. Se L è iperbolico, ma non strettamente iperbolico, la buona posizione del problema dipende dai termini di ordine inferiore all'ordine massimo. Un caso rilevante è quello della molteplicità costante: esistono $\mu < \nu$ radici reali e distinte $\lambda_j(t; x, \xi)$, $j = 1, \ldots, \mu$, con molteplicità $l_j \geq 1$, $l_1 + \ldots + l_\mu = \nu$. In questa situazione una condizione necessaria e sufficiente per la buona posizione in C^∞ e negli spazi di Sobolev è data dalla cosiddetta condizione di Levi, cf. Chazarain [1], Flaschka-Strang [3].

I risultati di cui sopra sono, in linea di principio, locali in t e x, validi in un intorno dell'origine di $\mathbf{R}^{n+1}_{t,x}$. Vogliamo discutere dell'esistenza di soluzioni $u(t, x)$ globali rispetto a x in $\mathbf{R}^n$. Ci sono, naturalmente, molti possibili approcci al problema; in questa tesi abbiamo seguito l'impostazione di Cordes [2], assumendo per i coefficienti $c_{j\alpha}(t; x)$ stime in termini di $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$, precisamente

$$|\partial_t^s \partial_x^\beta c_{j\alpha}(t; x)| \leq C_{s\beta} \langle x \rangle^{j - |\beta|}, \quad \beta \in \mathbf{N}^n, \quad t \in J, \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{6}$$

Il problema si può studiare nell'ambito del cosiddetto calcolo **SG**, di cui è dato qualche cenno nella successiva sezione (cf. Cordes [2], Parenti [5]). Le soluzioni vengono cercate nei corrispondenti spazi di Sobolev H^s con $s = (s_1, s_2) \in \mathbf{R}^2$, definiti in termini di pesi del tipo $\langle \xi \rangle^{s_1} \langle x \rangle^{s_2}$.

Cordes [2] ha trattato il problema strettamente iperbolico, utilizzando esclusivamente proprietà del calcolo pseudodifferenziale **SG**. Qui ci occupiamo del caso della molteplicità costante. In particolare, la richiesta che due radici λ_j, λ_k, siano distinte significa, in questo contesto,

$$|\lambda_j(t; x, \xi) - \lambda_k(t; x, \xi)| \geq c \langle \xi \rangle \langle x \rangle \tag{7}$$

per $|x| + |\xi| > R > 0$.

Come primo passo, si è definita e studiata la classe degli operatori integrali di Fourier associati ai simboli **SG**. La definizione di questi operatori e lo studio delle loro proprietà e dei legami con il corrispondente calcolo pseudodifferenziale costituiscono la prima parte della tesi. Successivamente, i risultati sugli operatori di Fourier sono stati applicati allo studio del problema (1): il calcolo degli operatori di Fourier, unito all'uso di risultati noti sui sistemi Hamiltoniani associati ad opportuni simboli **SG**, ha permesso di ottenere il teorema 3.3 relativo alla buona posizione ed alla regolarità della soluzione del problema (1) sotto un'opportuna condizione di Levi.

2. – Calcolo pseudodifferenziale ed operatori integrali di Fourier nelle classi SG.

DEFINIZIONE 1. – *Una funzione $p \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; \mathbf{C})$ si dice simbolo* **SG** *di ordine $m = (m_1, m_2) \in \mathbf{R}^2$ se soddisfa, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$, le stime*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 - |\alpha|} \langle x \rangle^{m_2 - |\beta|} \tag{8}$$

per opportune costanti $C_{\alpha\beta} \geq 0$ e per ogni $x, \xi \in \mathbf{R}^n$. L'insieme dei simboli di ordine $m \in \mathbf{R}^2$ si indica con $\mathbf{SG}^m_l$. In particolare, posto, per ogni $s \in \mathbf{R}^2$, $\pi_s(x, \xi) = \langle \xi \rangle^{s_1} \langle x \rangle^{s_2}$, risulta $\pi_s \in \mathbf{SG}^s_l$.

DEFINIZIONE 2. – *Ad ogni simbolo* $p \in \mathbf{SG}_l^m$ *si associa un operatore lineare* $\mathrm{Op}(p)$ *definito sullo spazio di Schwarz* $\mathcal{S}$ *delle funzioni a decrescenza rapida tale che,* $\forall u \in \mathcal{S}$,

$$(\mathrm{Op}(p)\, u)(x) = \int e^{ix\xi} a(x, \xi)\, \widehat{u}(\xi)\, \xi\,. \tag{9}$$

Nella (9) *si è posto* $x\xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$ *e* $đ\xi = (2\pi)^{-n} d\xi \cong$ *mentre* $\widehat{u}$ *indica la trasformata di Fourier di u. Ogni operatore della forma* (9) *con* $a \in \mathbf{SG}_l^m$ *si dice operatore pseudodifferenziale di ordine m. In particolare, poniamo* $\pi_s = \mathrm{Op}(\pi_s)$ *per ogni* $s \in \mathbf{R}^2$.

TEOREMA 1. – *Ogni operatore della forma* (9) *è lineare e continuo da* $\mathcal{S}$ *in* $\mathcal{S}$ *ed estendibile ad un operatore lineare e continuo dallo spazio di Schwarz* $\mathcal{S}'$ *delle distribuzioni temperate in* $\mathcal{S}'$. *Inoltre, se P e Q sono operatori pseudodifferenziali di ordini rispettivamente r ed s in* $\mathbf{R}^2$, *l'operatore composto PQ risulta essere un operatore pseudodifferenziale di ordine* $r + s$.

TEOREMA 2. – *Per ogni* $s \in \mathbf{R}^2$ *si definisca lo spazio* H^s *come il sottospazio di tutte le distribuzioni* $u \in \mathcal{S}'$ *tali che* $\pi_s u \in L^2$. *Lo spazio* H^s, *munito del prodotto scalare* $(u, v)_{H^s} = (\pi_s u, \pi_s v)_{L^2}$, *è uno spazio di Hilbert. Ogni operatore pseudodiffereziale P di ordine m è continuo da* H^s *in* H^{s-m} *per ogni* $m, s \in \mathbf{R}^2$.

DEFINIZIONE 3. – *Ogni simbolo* $\varphi \in \mathbf{SG}_l^{(1,1)}$ *si dice fase se è a valori reali e soddisfa, per opportune costanti* $c, C > 0$ *e per ogni* $x, \xi \in \mathbf{R}^n$, *le stime*

$$c\langle x\rangle \leq \langle (d_\xi \varphi)(x, \xi)\rangle \leq C\langle x\rangle,$$

$$c\langle \xi\rangle \leq \langle (d_x \varphi)(x, \xi)\rangle \leq C\langle \xi\rangle.$$

DEFINIZIONE 4. – *Ad ogni simbolo* $a \in \mathbf{SG}_l^m$ *e ad ogni fase* φ *si associa un operatore integrale di Fourier* $A_{\varphi, a}$, *definito su* $\mathcal{S}$ *tale che,* $\forall u \in \mathcal{S}$,

$$(A_{\varphi, a} u)(x) = \int e^{i\varphi(x, \xi)} a(x, \xi)\, \widehat{u}(\xi)\, đ\xi\,. \tag{10}$$

Il simbolo a viene detto, in questo caso, ampiezza dell'operatore.

TEOREMA 3. – *Ogni operatore integrale di Fourier* $A_{\varphi, a}$ *del tipo* (10), *con fase* φ *ed ampiezza* $a \in \mathbf{SG}_l^m$, *è lineare e continuo da* $\mathcal{S}$ *in sé ed estendibile ad un operatore lineare e continuo da* $\mathcal{S}'$ *in sé. Inoltre, se P è un operatore pseudodifferenziale di ordine r, gli operatori composti AP e PA sono ancora operatori integrali di Fourier con la stessa fase* φ *ed ampiezza di ordine* $r + m$.

3. – Esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy per dati negli spazi di Sobolev SG.

Come accennato nell'introduzione, la buona posizione del problema di Cauchy (1) dipende, nel caso della molteplicità costante, dai termini di ordine inferiore. In altre parole, è necessario imporre ulteriori condizioni sull'operatore L. La formulazione della condizione di Levi (che garantisce esistenza e unicità della soluzione del problema (1)) è, in termini sommari, la seguente. Si richiede che l'operatore L possa essere fattorizzato nel prodotto di μ operatori L_j, $j = 1, \ldots, \mu$, ciascuno dei quali è una combinazione lineare, a coefficienti pseudodifferenziali di ordine al più $(0, 0)$, di potenze dell'operatore $D_t - \mathrm{Op}(\lambda_j(t))$. Il simbolo $\lambda_j(t; x, \xi)$ è la j-esima delle μ radici distinte dell'equazione caratteristica di L, soddisfacenti (7).

Se L soddisfa la condizione di Levi, utilizzando il teorema 2.2 ed analizzando preliminarmente il caso di un sistema del primo ordine, è possibile provare la buona posizione del problema (1) negli spazi $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ e negli spazi H^s, $s \in \mathbf{R}^2$; inoltre, la soluzione può essere espressa in termini di operatori integrali di Fourier nelle classi **SG**. Vale, più precisamente, il seguente teorema.

TEOREMA 4. – *Sia L, definito come in* (2), (3), *iperbolico a molteplicità costanti del tipo di Levi, con coefficienti $c_{j\alpha}(t; x) \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1}_{t,x})$ che soddisfano la* (6). *Allora, per ogni scelta di $s \in \mathbf{R}^2$, $f \in C^\infty(J, H^s)$ e $g^k \in H^{s+(\nu-1-k,\, \nu-1-k)}$, $k = 0, \ldots, \nu - 1$, il problema di Cauchy* (1) *ammette una soluzione $u \in C(J, H^s)$ tale che, per ogni $k \in \mathbf{N}$, $D_t^k u \in C(J, H^{s-(k,k)})$. La soluzione u può essere espressa in termini di operatori integrali di Fourier le cui fasi sono soluzioni delle equazioni eikonali*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial t} = \lambda_j(t; x, d_x \varphi_j) \\ \varphi_j(0; x, \xi) = x\xi , \end{cases}$$

associate alle radici $\lambda_j(t; x, \xi)$ dell'equazione caratteristica (4) *dell'operatore L, mentre le ampiezze sono scelte nella classe dei simboli* **SG**.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. CHAZARAIN, *Opérateurs Hyperboliques a Caractéristiques de Multiplicité Constante*, Ann. Inst. Fourier, **24,1** (1974), 173-202.

[2] H.O. CORDES, *The Technique of Pseudodifferential Operators*, Cambridge Univ. Press (1995).

[3] H. FLASCHKA and G. STRANG, *The Correctness of the Cauchy Problem*, Adv. in Math., **6** (1971), 347-379.

[4] S. MIZOHATA, *Some Remarks on the Cauchy Problem*, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1961), 109-127.

[5] C. PARENTI, *Operatori pseudodifferenziali in $\mathbf{R}^n$ e applicazioni*, Ann. Mat. Pura Appl., **93** (1972), 359-389.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino; e-mail: Coriasco@dm.unito.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Università di Torino) - IX Ciclo
Direttore di ricerca: Prof L. Rodino, Università di Torino