Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Valentina Casarino

Quasi periodicità e uniforme continuità di semigruppi e funzioni coseno: criteri spettrali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 83–86.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_83_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 83-86

Quasi periodicità e uniforme continuità di semigruppi e funzioni coseno: criteri spettrali.

VALENTINA CASARINO

Siano $T: \mathbf{R}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ un semigruppo e $C: \mathbf{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ una funzione coseno di operatori lineari limitati agenti su uno spazio di Banach complesso $\mathcal{E}$.

Due sono le istanze alla base della tesi: innanzitutto, l'analisi dei vincoli imposti sulla struttura spettrale del generatore infinitesimale di T e di C da ipotesi sul comportamento quasi periodico, rispettivamente, del semigruppo e della funzione coseno; in secondo luogo, la ricerca di condizioni sufficienti a garantire che un semigruppo o una funzione coseno fortemente continui risultino uniformemente continui.

La nozione di quasi periodicità, introdotta da H.Bohr nel 1923 per funzioni continue sulla retta reale, a valori complessi, e le diverse generalizzazioni, a cui essa è stata sottoposta nel corso del tempo, sono state applicate, negli ultimi venti anni, allo studio delle funzioni generate, in vario modo, da famiglie di operatori lineari limitati. Fra i numerosi risultati, ricordiamo, in particolare, la caratterizzazione dei gruppi fortemente quasi periodici (tali, cioè, che le mappe, da $\mathbf{R}$ in $\mathcal{E}$, $t \mapsto U(t)\,x$, ove U rappresenta il gruppo di operatori, siano quasi periodiche per ogni $x \in \mathcal{E}$) in termini delle proprietà spettrali del generatore infinitesimale di U, dovuta a H. Bart e S. Goldberg [1], e la caratterizzazione, analoga, delle funzioni coseno fortemente quasi periodiche, dovuta a I. Cioranescu [2].

D'altro canto, E. Vesentini ha recentemente sviluppato [4] un'analisi della struttura spettrale del generatore infinitesimale X di un semigruppo T fortemente continuo sotto l'ipotesi, molto debole, che esistano un elemento x in $\mathcal{E}$ e un elemento λ nel duale topologico di $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, tali che l'applicazione, da $\mathbf{R}_+$ in $\mathbf{C}$, $t \mapsto \langle T(t)\,x, \lambda \rangle$ risulti asintoticamente quasi periodica (con la nozione di quasi periodicità asintotica M.Fréchet estese, nel 1941, la definizione di Bohr al caso di funzioni continue, definite soltanto su una semiretta). Vesentini ha mostrato, in particolare, come l'esistenza anche solo di una funzione, generata da T, asintoticamente quasi periodica sia sufficiente per imporre vincoli sullo spettro di X.

Nel secondo capitolo della tesi è presentata una estensione della sua analisi; in particolare, si è considerato il caso in cui la mappa $\varphi: t \mapsto \langle T(t)\,x, \lambda \rangle$ è, per qualche x in $\mathcal{E}$ e qualche λ in $\mathcal{E}'$, asintoticamente quasi periodica nel senso di Stepanov (ricordiamo che con questa nozione W.W.Stepanov estese la definizione di quasi periodicità di Bohr a funzioni non necessariamente continue, ma solo misurabili e integrabili nel senso di Lebesgue su una semiretta). Il caso più interessante è quello in cui la mappa φ, supposta asintoticamente quasi periodica nel senso di Stepanov, non è continua, ma appartiene a $L^p(0, +\infty)$ per un $p \geq 1$. Dal momento che applicazioni di questo tipo si possono costruire a partire da semigruppi non fortemente continui, un primo passo nella ricerca è consistito nel selezionare una classe opportuna di semigruppi fortemente misurabili, e soddisfacenti, in più, due ipotesi tecniche di limitatezza e di integrabilità (che indicheremo in seguito con h_1 e h_2). Osserviamo che per tali semigruppi non è, in generale, garantita l'esistenza del generatore infinitesimale, ma solo quella di un operatore X_0, che viene detto *operatore infinitesimale*, che non è, in generale, nè chiuso nè densamente definito.

Ricordiamo, inoltre, che, data una mappa f asintoticamente quasi periodica nel senso di Stepanov è possibile definire le frequenze e la serie di Fourier di f. Abbiamo, quindi, analizzato il legame fra le frequenze di φ e lo spettro dell'operatore infinitesimale. Per la definizione di semigruppo di classe (A) si rimanda a [3]. I simboli σ, $p\sigma$ e $r\sigma$ denotano, rispettivamente, lo spettro, lo spettro puntuale e lo spettro residuo.

TEOREMA 1. – *Sia* $T:(0, +\infty) \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ *un semigruppo fortemente misurabile su* $\mathcal{E}$, *soddisfacente* h_1) *e* h_2).

1) *Se esistono* $x \in \mathcal{E}$ *e* $\lambda \in \mathcal{E}'$ *tali che la funzione* $\varphi : t \mapsto \langle T(t)\, x, \lambda \rangle$ *è non costante, asintoticamente quasi periodica nel senso di Stepanov, allora l'insieme di tutte le frequenze di* φ *è contenuto nell'insieme* $\frac{1}{i}[(p\sigma(X_0) \cup r\sigma(X_0)) \cap i\mathbf{R}]$.

2) *Se* T *è di classe* (A) *e se esistono* $x \in \mathcal{E}$ *e* $\lambda \in \mathcal{E}'$ *tali che la funzione* $\varphi : t \mapsto \langle T(t)\, x, \lambda \rangle$ *è non costante e asintoticamente quasi periodica nel senso di Stepanov, allora l'insieme di tutte le frequenze di* φ *è contenuto nell'insieme* $\frac{1}{i}[(p\sigma(X_0) \cup r\sigma(X)) \cap i\mathbf{R}]$.

Viceversa, per ogni $i\theta \in (p\sigma(X) \cup r\sigma(X)) \cap i\mathbf{R}$, *esistono* $x \in \mathcal{D}(X)$ *e* $\lambda \in \mathcal{E}'$ *tali che* $\langle x, \lambda \rangle \neq 0$ *e* θ *è una frequenza della funzione periodica* $t \mapsto \langle T(t)\, x, \lambda \rangle$.

L'analisi del legame fra lo spettro di X_0 e le frequenze di φ ha permesso, da un lato, di esplicitare i vincoli imposti su $\sigma(X_0)$ dall'esistenza di funzioni asintoticamente quasi periodiche generate dal semigruppo T (per esempio, sotto ipotesi piuttosto generali si è mostrato che la chiusura dell'insieme $\frac{1}{i}[(p\sigma(X_0) \cup r\sigma(X)) \cap i\mathbf{R}]$ è discreta), dall'altro di formulare teoremi di convergenza per la serie di Fourier associata a φ sotto ipotesi solo sullo spettro di X_0.

Sia ora C una funzione coseno fortemente continua, generata da Y. Un'estensione successiva dei risultati contenuti in [4] è consistita nella analisi dello spettro di Y, nell'ipotesi che esistano $x \in \mathcal{E}$ e $\lambda \in \mathcal{E}'$ tali che la mappa $\psi : t \mapsto \langle C(t)\, x, \lambda \rangle$ sia asintoticamente quasi periodica nel senso di Fréchet.

Nel terzo capitolo si è dimostrato, innanzitutto che i quadrati di tutte le frequenze della mappa ψ, cambiati di segno, appartengono a $(p\sigma(Y) \cup r\sigma(Y)) \cap \mathbf{R}_-$; viceversa, per ogni elemento ζ appartenente a $(p\sigma(Y) \cup r\sigma(Y)) \cap \mathbf{R}_-$ esistono $x \in \mathcal{E}$ e $\lambda \in \mathcal{E}'$ tali che $\langle x, \lambda \rangle \neq 0$ e $\sqrt{-\zeta}$ sia una frequenza della funzione periodica $t \mapsto \langle C(t)\, x, \lambda \rangle$. Analogamente al caso dei semigruppi, la caratterizzazione delle frequenze della mappa $\psi : t \mapsto \langle C(t)\, x, \lambda \rangle$ in termini dello spettro di Y ha poi permesso di studiare l'analisi armonica della mappa ψ e di dimostrare, sotto ipotesi sullo spettro di Y, teoremi di convergenza per la serie di Fourier associata a ψ.

Nel terzo capitolo è presentato anche un primo approccio allo studio del legame fra funzioni coseno e sistemi dinamici: per una particolare funzione coseno C, costruita a partire da un flusso continuo Φ agente su uno spazio di Hausdorff compatto K, si sono studiati i vincoli imposti sulla struttura spettrale del generatore di C dall'esistenza di punti asintoticamente stabili e di orbite periodiche e quasi periodiche per Φ.

Lo strumento fondamentale per lo studio delle proprietà di quasi periodicità di un semigruppo o di una funzione coseno è costituito dai teoremi ergodici, che stabiliscono l'esistenza di un limite generalizzato di $T(t)$ o di $C(t)$ per $t \to 0$ o $t \to +\infty$. Al problema della convergenza di opportune medie associate a T o a C (in particolare, delle medie di Cesàro e di Abel) è dedicata, quindi, particolare attenzione nel secondo e nel terzo capitolo.

Nella seconda parte della tesi presentiamo condizioni sufficienti per l'uniforme continuità di un semigruppo e di una funzione coseno. La prima di queste condizioni riguarda il caso in cui esiste un polinomio a coefficienti complessi p tale che per qualche $t \neq 0$ risulti $p(C(t)) = 0$, la seconda riguarda semigruppi fortemente continui che operano in un'algebra di Banach complessa dotata di unità.

Per quanto riguarda la prima condizione, il teorema dell'equazione minimale di N.Dunford asserisce che, dato un operatore lineare limitato A e data una funzione f a valori complessi, analitica su un intorno dello spettro di A, se $f(A) = 0$, allora lo spettro di A consiste solo di un insieme finito $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ di poli della funzione risolvente $\zeta \to (\zeta I - A)^{-1}$ aventi ordine $m_1, \ldots, m_n$ rispettivamente. Inoltre, per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$, τ_j è uno zero di f di ordine superiore o uguale a m_j. Viceversa, se $\sigma(A)$ coincide con l'insieme $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, dove τ_j è un polo di ordine m_j di $\zeta \to (\zeta I - A)^{-1}$ per $j = 1, \ldots, n$, e se τ_j è uno zero per f con ordine almeno uguale a m_j, si ha allora $f(A) = 0$. Si può poi mostrare che non si perde in generalità scegliendo come f un polinomio complesso p.

Si consideri ora il caso in cui $A = C(t)$, per qualche $t \neq 0$, ove C rappresenta una funzione coseno fortemente continua generata da X. Per comprendere se e quali vincoli siano imposti su C dall'esistenza di un polinomio p avente $C(t)$ come zero, si può considerare, in virtù del teorema di Dunford, il caso in cui lo spettro di $C(t)$ consista di un insieme finito di poli della funzione risolvente di $C(t)$. Il principale risultato che abbiamo ottenuto è il seguente:

TEOREMA 2. – *Sia $C : \mathbf{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{E})$ una funzione coseno fortemente continua, su uno spazio di Banach complesso $\mathcal{E}$, generata da Y, per la quale esistano $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$, con $\frac{t_1}{t_2} \notin \mathbf{Q}$, tali che $\sigma(C(t_1))$ e $\sigma(C(t_2))$ consistano di insiemi finiti di poli delle funzioni risolvente, rispettivamente, $(\cdot I - C(t_1))^{-1}$ e $((\cdot I - C(t_2))^{-1}$.*

Allora lo spettro di Y consiste solo di un insieme finito di punti

$\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$, *poli della funzione risolvente di* Y *di ordine* $m_1, \ldots, m_n$, *e* C *è uniformemente continua.*

Ricordiamo, inoltre, che nel caso finito-dimensionale, secondo il teorema di Hamilton-Cayley una matrice in $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ soddisfa la sua equazione caratteristica. Definito in modo opportuno un polinomio caratteristico associato a una funzione coseno C, abbiamo ottenuto una versione del teorema di Hamilton-Cayley per funzioni coseno come conseguenza del teorema appena presentato:

PROPOSIZIONE 1. – *Sotto le ipotesi del Teorema* 2, $C(t)$ *è una radice del suo polinomio caratteristico per ogni* $t \in \mathbf{R}$.

Nel quinto capitolo abbiamo infine considerato famiglie di operatori che agiscono su un'algebra di Banach complessa $\mathcal{A}$ dotata di unità 1. In particolare, si è dimostrato che se T è un semigruppo fortemente continuo agente su $\mathcal{A}$, tale che per ogni $x \in \mathcal{A}$ valga la rappresentazione $T(t)x = (T(t)1) \cdot x$ per ogni t appartenente a un intervallo $I = (0, t_1)$, tranne, al più, che su un sottoinsieme di misura nulla di I, allora T è uniformemente continuo. Risultati analoghi sono presentati anche per una funzione coseno C fortemente continua agente su $\mathcal{A}$.

Successivamente, l'ipotesi sulla rappresentazione di T nell'intervallo I è stata applicata allo studio delle proprietà di quasi periodicità di T: si è dimostrato, in particolare, che, se esiste un elemento $x \in \mathcal{A}$, invertibile, tale che la applicazione $t \mapsto T(t)\,x$ sia asintoticamente quasi periodica, allora il semigruppo T risulta essere uniformemente asintoticamente quasi periodico. Risultati analoghi valgono anche nel caso in cui sia supposta asintoticamente quasi periodica una mappa del tipo $t \mapsto \langle T(t)\,x, \lambda \rangle$, ove x è un elemento di $\mathcal{A}$ e λ un carattere dell'algebra.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BART and S. GOLDBERG, *Characterization of almost periodic strongly continuous groups and semigroups*, Math. Ann., **236** (1978), 105-116.
[2] I. CIORANESCU, *Characterization of almost periodic strongly continuous cosine operator functions*, Journal of Math. Anal. and Appl., **116** (1986), 222-229.
[3] E. HILLE and R.S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31** (1957).
[4] E. VESENTINI, *Spectral properties of weakly asymptotically almost periodic semigroups*, Advances in Math., **128** (1997), 217-241.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino; e-mail: casarino@dm.unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Torino) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. E. Vesentini, Politecnico di Torino