Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Fabio Bagagiolo

Un problema di controllo con isteresi per la filtrazione nei mezzi porosi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 71–74.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_71_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 71-74

Un problema di controllo con isteresi per la filtrazione nei mezzi porosi.

FABIO BAGAGIOLO

1. – Introduzione.

In questa tesi si studia un modello matematico per un problema di controllo con isteresi per la filtrazione nei mezzi porosi (problema della diga). Si vuole controllare l'evoluzione di una *media pesata* f della saturazione, che può rappresentare ad esempio la quantità d'acqua presente in una prefissata regione della diga. Si effettua tale controllo regolando il livello di uno dei due bacini, ad esempio alzando o abbassando il livello. Si noti che il dato al bordo per la pressione dipende dal livello dei bacini. La relazione tra f e la monotonia del livello del bacino è data tramite una legge di isteresi. In particolare si considera l'operatore di isteresi *relè ritardato* ma vengono dati alcuni cenni anche al caso dell'operatore di *Preisach* (non riportati in questa nota). Si vuole quindi determinare l'esistenza di una soluzione del problema della filtrazione accoppiato con la relazione di isteresi tra f e il dato al bordo per la pressione. La formulazione del problema e le tecniche adottate per ottenere una soluzione si collocano nell'ambito dell'analisi funzionale ed in particolare delle disequazioni variazionali.

Infine si studia un problema di controllo ottimo: si vuole ottimizzare, al variare delle soglie per il relè, l'evoluzione di f tenendo conto del numero degli scatti del relè. Si dimostra l'esistenza di un controllo ottimo in un opportuno insieme.

Altri problemi di controllo con isteresi per problemi di frontiera libera sono stati studiati (1); sembra però che il «problema della diga» con isteresi non sia mai stato affrontato prima.

2. – La filtrazione nei mezzi porosi.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ limitato, aperto e connesso, rappresentante la regione occupata dal mezzo poroso. Siano Γ_1 e Γ_2 rispettivamente la parte di bordo impermeabile e quella permeabile (vedi Fig. 1). Sia $[0, T]$ un intervallo di tempo e poniamo $Q := \Omega \times]0, T[$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times]0, T[$, $\Sigma_2 := \Gamma_2 \times]0, T[$.

Siano $s, u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ rispettivamente il livello di *saturazione* del mezzo poroso e la *pressione* dell'acqua all'interno del mezzo. Scriviamo la *conducibilità idraulica* K del mezzo nel seguente modo (2):: $K(x, t) = a(x)\, k(s(x, t))$. La legge di bilanciamento della massa e la legge di Darcy danno un'equazione in u ed s che, dopo una trasformazione integrale della pressione e trascurando alcuni coefficienti costanti,

(1) Si veda ad esempio Friedman-Hoffmann [4].
(2) In particolare k è una funzione continua e crescente; a è uno scalare (od una matrice nel caso di mezzo non isotropo).

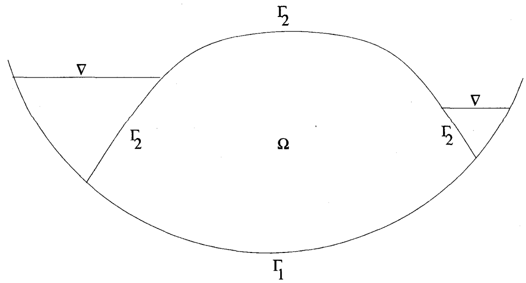

Fig. 1. – Sezione di una diga porosa separante due bacini.

si può scrivere nel seguente modo:

$$s_t - \nabla \cdot [a\nabla u + k(s)\, \vec{z}\,] = 0 \qquad \text{in } Q\,, \tag{1}$$

dove s_t è derivata temporale, ∇ è il gradiente spaziale, «$\nabla \cdot$» è l'operatore divergenza nelle variabili spaziali e $\vec{z}$ è il versore verticale.

La relazione costitutiva tra pressione e saturazione è descritta da un grafico massimale monotono $S : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Se S ha tratti verticali, allora si ottiene la formualzione del problema di frontiera libera (3). Per gli aspetti ingegneristici del problema si veda Bear [3]. I primi lavori matematici sul problema della filtrazione risalgono a Baiocchi [2] (4).

Tenendo conto di fenomeni di capillarità, il dato al bordo per la pressione su Σ_2 può essere scritto come disequazione variazionale (5).

Otteniamo la seguente formulazione debole del problema della filtrazione con capillarità e relativo teorema di esistenza:

TEOREMA 1. – *Dati P e s^0, valore al bordo per la pressione e valore iniziale della saturazione, esistono $u, s : Q \to \mathbb{R}$ in opportuni spazi di Sobolev, tali che $u^+ = P$ su Σ_2, $s \in S(u)$, e: (W è la convessa coniugata di una primitiva di S)*

$$-\alpha(0) \int_\Omega [W(s^0(x)) - s^0(x)\, v(x, 0)]\, dx - \int_Q W(s)\, \alpha_t\, dx\, dt$$

$$+ \int_Q s(v\alpha)_t\, dx\, dt + \int_Q a(\nabla u + k(s)\, \vec{z}\,) \cdot \nabla(u - v)\, \alpha\, dx\, dt \leq 0\,,$$

per ogni scelta di opportune funzioni test v e α.

Una dimostrazione del Teorema 1 è tracciata in [1]. Nella tesi ne viene data una dettagliata, anche perché si sono cambiate alcune ipotesi.

(3) Nel problema studiato S è continuo; il problema di frontiera libera può essere visto come limite sulla forma di S.

(4) Negli ultimi vent'anni molti altri autori si sono occupati di questo problema. Il modello qui presentato è descritto e studiato in Alt-Luckhaus-Visintin [1].

(5) Il dato al bordo è prescritto solamente sulla parte a contatto con i bacini, dove coincide con la pressione idrostatica.

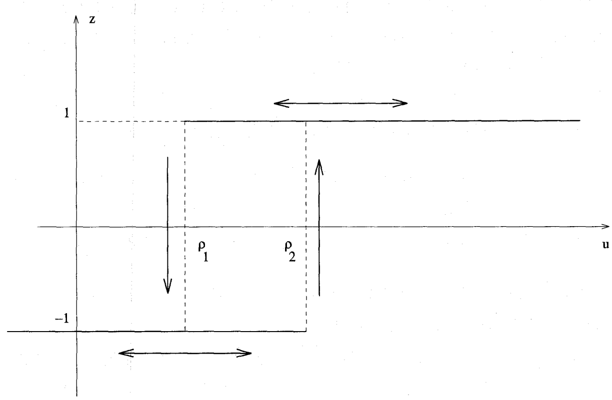

Fig. 2. – Relè ritardato.

3. – Un problema di controllo.

Siano (u, s) una soluzione data dal Teorema 1 e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione. Consideriamo la quantità $f(t) := \int_\Omega s\varphi dx$. Si vuole «ottimizzare» l'evoluzione di f; in particolare cercare di farla restare sempre «vicino» ad un valore prefissato f_0. Supponiamo di avere la facoltà di abbassare o alzare il livello di uno dei bacini. La strategia da seguire potrebbe essere la seguente: se $f(t) < f_0$ allora alziamo il livello, se $f(t) > f_0$ allora abbassiamo il livello (6). Una siffatta strategia (in particolare la presenza della sola soglia f_0) potrebbe però provocare degli indesiderati comportamenti oscillatori della soluzione e quindi la sua non esistenza. È quindi preferibile considerare una legge di isteresi di tipo relè per legare il comportamento del bacino con quello di f.

Consideriamo il grafico in Fig. 2 che mette in relazione due funzioni del tempo u (input) e z (output) (7). La legge è la seguente: $u < \varrho_1 \Rightarrow z = -1$; $u > \varrho_2 \Rightarrow z = +1$; se $\varrho_1 \leqslant u \leqslant \varrho_2$ allora il valore di z dipende dalla storia passata di u. Ad esempio, se $z = -1$ allora z scatta da -1 a $+1$ quando u supera ϱ_2 crescendo, e riscatta nuovamente su -1 solamente quando u decrescendo oltrepassa anche ϱ_1. L'operatore tra spazi di funzioni del tempo che agisce come in Fig. 2 si chiama *relè ritardato*. Esso è un importante esempio di operatore di isteresi in quanto è il mattone fondamentale per costruire l'operatore di *Preisach* (8).

Scegliamo quindi due soglie $\varrho_1 < f_0 < \varrho_2$ e applichiamo la strategia seguente: $f < \varrho_1$ allora alziamo il livello, $f > \varrho_2$ allora abbassiamo il livello, se $\varrho_1 \leqslant f \leqslant \varrho_2$ allora il comportamento dipende dalla storia passata di f con una legge di isteresi del tipo re-

(6) $f(t)$ può rappresentare la quantità d'acqua presente all'interno della diga all'istante t e quindi f_0 può essere la quantità d'acqua «ideale».

(7) Ovviamente ben diverse da altre funzioni per le quali prima si sono usate le stesse lettere.

(8) I primi studi matematici sui fenomeni di isteresi risalgono agli anni settanta (vedi Krasnoselskii-Pokrovskii [5]). Per un'esauriente esposizione, con particolare riguardo per le applicazioni alle equazioni alle derivate parziali, vedi Visintin [6].

lè ritardato. Il problema si scrive accoppiando quello della filtrazione con un problema di Cauchy che determina il dato al bordo per la pressione; in quest'ultimo problema compare il relè ritardato dipendente da f che a sua volta dipende dalla soluzione s. C'è quindi una legge di feedback: la soluzione dipende dal dato al bordo che a sua volta dipende dalla soluzione tramite una legge di isteresi.

TEOREMA 2. – *Esiste una coppia di funzioni* (u, s) *soluzione del problema feedback, cioè soluzione del problema della filtrazione* (*Teorema* 1) *in cui il dato per la pressione è determinato con il feedback descritto sopra.*

Per la dimostrazione si usano metodi di compattezza ed una sorta di «chiusura» dell'operatore soluzione del Teorema 1.

Prendere ϱ_1 e ϱ_2 più vicini a f_0 probabilmente costringe f a stare più vicino a f_0, ma potrebbe anche generare un numero più elevato di scatti del relè. Vogliamo quindi minimizzare, al variare della coppia di soglie $\varrho = (\varrho_1, \varrho_2)$ il funzionale:

$$J(\varrho) = \int_0^T (f_\varrho(t) - f_0)^2 dt + \alpha \cdot (\textit{numero di scatti del relè}),$$

dove $\alpha > 0$ e f_ϱ è relativa al problema feedabck con coppia di soglie ϱ.

TEOREMA 3. – *Preso un insieme di coppie* $R = \{\varrho = (\varrho_1, \varrho_2) \mid C_1 \leqslant \varrho_1 \leqslant f_0 \leqslant \varrho_2 \leqslant C_2\}$, *con* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, *esiste una coppia* $\bar{\varrho}$ *che minimizza* J *su* R.

Notiamo che R contiene anche la coppia «degenere» (f_0, f_0), per la quale comunque una soluzione del problema feedback potrebbe esistere. Un problema da studiare può essere quello di vedere in quali casi la coppia ottima non coincide con quella degenere.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. W. ALT, S. LUCKHAUS and A. VISINTIN, *On nonstationary flow through porous media*, Ann. Mat. Pura Appl., **136** (1984), 303-316.

[2] C. BAIOCCHI, *Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica*, Ann. Mat. Pura Appl., **92** (1972), 107-127.

[3] J. BEAR, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier, New York, 1972.

[4] A. FRIEDMAN and K.-H. HOFFMANN, *Control of free boundary problems with hysteresis*, SIAM J. Control and Optim., **26** (1988), 42-55.

[5] M. A. KRASNOSEL'SKII and A. V. POKROVSKII, *Systems with Hysteresis*, Spinger, New York, 1989.

[6] A. VISINTIN *Differential Models of Hysteresis*, Springer, Berlin, 1994.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: fbaga@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Trento) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Augusto Visintin, Università di Trento