BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

CHIARA NICOTERA

Sui gruppi con proprietà di permutazione sui commutatori

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 49–52.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_49_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 49-52

Sui gruppi con proprietà di permutazione sui commutatori.

CHIARA NICOTERA

Le proprietà di permutazione sui commutatori vengono definite prendendo spunto dalle definizioni di alcune proprietà di riscrivibilità di un gruppo.

Le proprietà di riscrivibilità sono proprietà che generalizzano la commutatività e una tra le più studiate è la totale riscrivibilità.

Siano G un gruppo e $n > 1$ un intero; si dice che G è n-totalmente riscrivibile se e solo se comunque si considerino n suoi elementi, $x_1, \ldots, x_n$, esiste una permutazione non identica σ sull'insieme di indici $\{1, \ldots, n\}$ tale che

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = x_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_{\sigma(n)}.$$

La classe dei gruppi n-totalmente riscrivibili si denota con P_n.

La n-totale riscrivibilità generalizza la commutatività, infatti è immediato osservare che i gruppi 2-totalmente riscrivibili sono tutti e soli i gruppi abeliani.

Nel 1983 M. Curzio, P. Longobardi e M. Maj hanno dimostrato che i gruppi 3-totalmente riscrivibili sono esattamente i gruppi il cui derivato ha ordine al più 2.

Per quanto riguarda la classe P_4 si può poi provare che questa è costituita di gruppi metabeliani ovvero di gruppi il cui derivato è un gruppo abeliano. Si ha così che le classi P_2, P_3 e P_4 sono costituite di gruppi risolubili. Ci si chiede dunque quale sia il massimo valore di n per cui ogni gruppo in P_n è un gruppo risolubile e, nel 1990, R. Blyth e D.J.S. Robinson hanno provato che tale valore di n è 7. Infatti ogni gruppo 7-totalmente riscrivibile è risolubile mentre il gruppo alterno di grado 5, che è un gruppo semplice non abeliano, è 8-totalmente riscrivibile.

I gruppi totalmente riscrivibili, e cioè i gruppi che sono n-totalmente riscrivibili per un opportuno n, furono introdotti per la prima volta da I. Kaplansky nel 1949 e caratterizzati nel 1985 da M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj e D.J.S. Robinson come tutti e soli i gruppi dotati di un sottogruppo normale di indice finito il cui derivato è finito ovvero, come si suol dire, tutti e soli i gruppi finito-per-abeliano-per-finito.

Proprietà analoghe possono essere definite anche in relazione ai commutatori.

Come è noto se x e y sono elementi di un gruppo G, si definisce commutatore della coppia (x, y) il prodotto $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$.

È poi possibile definire, per induzione, il commutatore di un qualsiasi peso $n > 0$ negli elementi di un gruppo G ponendo $[x_1] := x_1$ per ogni $x_1 \in G$ e, supposto definito $[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ per ogni $x_1, \ldots, x_{n-1} \in G$, $[x_1, \ldots, x_n] := [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ per ogni $x_1, \ldots, x_n \in G$.

Si dice che un gruppo G ha i commutatori di peso n riscrivibili se e solo se per ogni n-upla $(x_1, \ldots, x_n)$ di elementi del gruppo esiste una permutazione non identica $\sigma \in S_n$ tale che

$$[x_1, \ldots, x_n] = [x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

I gruppi in cui i commutatori di peso 2 sono riscrivibili sono, come è facile osservare, tutti e soli i gruppi in cui i commutatori non identici sono involuzioni, ovvero costituiscono la varietà V definita dall'identità $[x, y]^2 = 1$. Tale varietà di gruppi è stata descritta da I.D.Macdonald che nel 1961 ha dimostrato che ogni gruppo G della varietà V ha il derivato secondo contenuto nel centro e il derivato di esponente 4.

I gruppi i cui commutatori di peso 3 sono riscrivibili sono stati studiati da P. Longobardi che nel 1988 ha dimostrato che ogni gruppo finito con tale proprietà è p-nilpotente per ogni primo $p \neq 2, 3$ e quindi è, in particolare, risolubile. Se poi un tale gruppo G ha ordine dispari, allora G è nilpotente di classe al più 3 inoltre se l'ordine di G, oltre ad essere dispari, non è divisibile per 3 si ha che G è nilpotente di classe al più 2.

Una ulteriore proprietà di riscrivibilità dei commutatori può poi essere introdotta come segue.

Siano G un gruppo ed $n > 1$ un intero; si dice che il gruppo G è in C_n se comunque si consideri una $(n+1)$-upla di elementi di G, $(a, x_1, \ldots, x_n)$, esiste una permutazione non identica $\sigma \in S_n$ tale che

$$[a, x_1, \ldots, x_n] = [a, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

In altre parole si richiede che, nel gruppo G, ogni commutatore di peso $n+1$ coincida con almeno uno dei commutatori che si ottengono formalmente da esso permutando in modo non banale i suoi ultimi n termini.

Si noti che la classe C_n è costituita di particolari gruppi a commutatori di peso $n+1$ riscrivibili. Si osservi inoltre che, nella definizione, la permutazione σ dipende dalla $(n+1)$-upla di elementi di G che si considera. Ovviamente però se in un gruppo G vale l'identità

$$[a, x_1, \ldots, x_n] = [a, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}], \quad (*)$$

con σ fissata permutazione non identica di S_n, allora G è un particolare gruppo C_n. Pertanto, per ogni $\sigma \in S_n - \{1\}$, la varietà V_σ definita dalla legge $(*)$ è una sottoclasse di C_n. Per quanto riguarda tali varietà sussiste un primo risultato del 1964 dovuto a F. Levin che assicura che ogni gruppo G della varietà definita dall'identità $(*)$, con $\sigma = (n-1\, n)$, è tale che $[\gamma_{n-2}(G), \gamma_2(G)] = 1$, dove $\gamma_{n-2}(G)$ e $\gamma_2(G)$ sono termini della serie centrale inferiore di G.

Utilizzando poi un risultato del 1970 dovuto a N.D. Gupta e F. Levin si può osservare in primo luogo che ciascuna di tali varietà è costituita di gruppi che sono nilpotente-per-nilpotente. In particolare poi se $n > 2$ e $\sigma(n) \neq n$, allora V_σ è costituita di gruppi che sono abeliano-per-nilpotente, mentre se $\sigma(1) \neq 1$ allora V_σ è contenuta nella varietà dei gruppi nilpotenti di classe $\leqslant n+2$.

È immediato osservare che per $n = 2$ richiedere che un gruppo G sia in C_2 equivale a richiedere che G soddisfi l'identità $[a, x_1, x_2] = [a, x_2, x_1]$ e ciò, per un risultato di F.Levin del 1968, equivale al fatto che il commutatore di ogni coppia di elementi di G, e quindi il derivato G' di G, sia contenuto nel centro di G ovvero che il gruppo G sia nilpotente di classe $\leqslant 2$. Pertanto C_2 coincide con la varietà dei gruppi nilpotenti di classe $\leqslant 2$.

Per quanto riguarda la classe C_3, per definizione, un gruppo G è in C_3 se per ogni quaterna a, x_1, x_2, x_3 di elementi di G esiste una permutazione non identica $\sigma \in S_3$ tale che $[a, x_1, x_2, x_3] = [a, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]$. La permutazione σ dipende dalla quaterna di elementi del gruppo che si considera però è evidente che se ogni quaterna di elementi di G verifica l'identità $[a, x_1, x_2, x_3] = [a, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}]$ $(**)$, con σ fissato elemento di $S_3 - \{1\}$, allora $G \in C_3$. Ciò vuol dire che ciascuna delle varietà definite dall'identità $(**)$ con σ fissata permutazione non identica di S_3, è una sottoclasse di C_3. Dunque un primo passo nello studio dei gruppi C_3 consiste nell'individuare queste varietà e a tale proposito sussiste il seguente risultato.

TEOREMA 1. – [3] *Sia σ una permutazione non banale di S_3 e sia V_σ la varietà di gruppi definita dall'identità*

$$[a, x_1, x_2, x_3] = [a, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}].$$

Ogni gruppo G in V_σ è metabeliano e inoltre se $\sigma \neq (2\ 3)$ allora ogni gruppo G in V_σ è nilpotente di classe ≤ 3.

Gli esempi più immediati di gruppi C_3 sono dunque tutti metabeliani per cui a questo punto è piuttosto naturale chiedersi se ogni gruppo C_3 sia metabeliano oppure no e la risposta è no. Infatti è possibile dare un esempio di gruppo C_3 non metabeliano. Sia $H := D_8 wr Z_2$ il prodotto intrecciato standard del gruppo diedrale di ordine 8 e del gruppo di ordine 2. È immediato osservare che H non è metabeliano e non è difficile verificare che $H \in C_3$. A tale scopo si può utilizzare il computer package GAP (cfr. [2]) o anche procedere ad una verifica diretta. Inoltre si può osservare che il gruppo $H \times H$ non è C_3 e che, pur non essendo H metabeliano, comunque si consideri una coppia di elementi di H il sottogruppo che essi generano è metabeliano ovvero che H è, come si suol dire, 2-metabeliano.

Da $H \in C_3$ e $H \times H \notin C_3$ segue che la classe C_3, non essendo chiusa per prodotti diretti, non è una varietà.

In generale si dimostra il seguente teorema.

TEOREMA 2. – [4] *Sia G un gruppo. Se $G \times G$ è un gruppo C_3, allora G è metabeliano.*

Da ciò segue che la varietà dei gruppi metabeliani è la più grande varietà contenuta in C_3.

Il gruppo nilpotente H è 2-metabeliano e ciò è in accordo con il seguente risultato.

TEOREMA 3. – [2]. – *Ogni gruppo nilpotente in C_3 è 2-metabeliano.*

Tale teorema vale anche per i gruppi periodici e privi di involuzioni si ha cioè che

TEOREMA 4. – [1] *Sia $G \in C_3$. Se G è periodico e privo di involuzioni, allora G è 2-metabeliano.*

È ancora aperto il problema di stabilire se ogni gruppo C_3 sia 2-metabeliano oppure no. Un risultato del 1994 dovuto a G. Malle, J. Saxl e T. Weigel assicura che ogni gruppo semplice finito non abeliano è generabile con due elementi uno dei quali è una involuzione; pertanto se G è un gruppo finito 2-metabeliano i fattori di composizione di G sono necessariamente gruppi abeliani, ovvero G è un gruppo risolubile. È possibile dimostrare che ogni gruppo finito C_3 è un gruppo risolubile (cfr. [4]) e a tale scopo si procede come segue. In primo luogo si osserva che

PROPOSIZIONE 5. – *Sia G un gruppo C_3. Considerati a, $x \in G$ e indicato con K un sottogruppo abeliano di G includente a, il sottogruppo $H := \langle [a, x, k] \mid k \in K \rangle$ è abeliano.*

Tale proposizione vale in particolare per $K = \langle a \rangle$, pertanto si ha che $A := \langle [a, x, a^n] \mid n \in \mathbb{Z} \rangle$ è un gruppo abeliano. Nel caso in cui l'elemento x è una involuzione è possibile dire qualcosa in più.

LEMMA 1. – *Sia $G = \langle a, x \rangle$ un gruppo C_3. Se $o(x) = 2$, allora il sottogruppo abeliano $A = \langle [a, x, a^n] \mid n \in Z \rangle$ è normale in G.*

Da ciò si deduce facilmente che

COROLLARIO 1. – *Sia G un gruppo in C_3 dotato di una involuzione x. Per ogni $a \in G$ il sottogruppo $\langle a, x \rangle$ è abeliano-per-ciclico-per-abeliano.*

Dunque, ricordando il risultato di Malle, Saxl e Weigel precedentemente citato, si ha che un gruppo semplice finito è in C_3 se e solo se è abeliano e da ciò discende subito il seguente teorema

TEOREMA 5. – *Ogni gruppo finito in C_3 è risolubile.*

BIBLIOGRAFIA

[1] NICOTERA C., *On groups with a permutational property on commutators of weight 4*, Arch. Math. (Basel), **70** (1998), 257-261.

[2] NICOTERA C., *A note on rewritability of commutators in nilpotent groups*, Communications in Algebra, **26 (9)** (1998), 2967-2970.

[3] NICOTERA C., *Una breve nota su alcune varietà di gruppi*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere - Sez. A: Scienze Matematiche e Applicazioni, **132 (2)** (1998).

[4] NICOTERA C., *On solubility of some groups with a permutational property on commutators*, Preprint n. 46 1997 Dipartimento di Matematica e Applicazioni «R. Caccioppoli».

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli Federico II
e-mail: nicotera@matna2.dma.unina.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Napoli, Federico II) - Ciclo IX
Direttori di ricerca: Prof.ssa P. Longobardi Università di Napoli Federico II
Prof.ssa M. Maj Università di Salerno