Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Paola Frediani

Funzioni algebriche reali, curve algebriche reali e loro spazio dei moduli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 33–36.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_33_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 33-36

Funzioni algebriche reali, curve algebriche reali e loro spazio dei moduli.

PAOLA FREDIANI

L'oggetto principale di studio di questa tesi è lo spazio di Hurwitz delle classi di isomorfismo delle funzioni algebriche (i.e. olomorfe) reali $f: \mathcal{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, dove $\mathcal{C}$ è una superficie di Riemann compatta connessa di genere $g \geq 0$ e f ha grado $d \geq 2$, f è generica, cioè tutti i valori critici hanno molteplicità 1.

Dire che f è reale significa che esiste un'involuzione antiolomorfa σ sulla superficie di Riemann $\mathcal{C}$ tale che per ogni z in $\mathcal{C}$, $f \circ \sigma(z) = \overline{f(z)}$.

Supponiamo che esista un'involuzione antiolomorfa σ sulla superficie di Riemann $\mathcal{C}$, in altre parole supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una curva algebrica reale, infatti è possibile scegliere un'immersione pluricanonica di $\mathcal{C}$ in $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ in modo tale che σ sia l'involuzione indotta dalla coniugazione complessa, quindi $\mathcal{C}$ è una curva algebrica complessa definita da polinomi reali.

Nella tesi è data una descrizione combinatorica completa delle monodromie delle funzioni algebriche reali generiche, descrizione che generalizza i risultati ottenuti in [4] nel caso delle funzioni polinomiali, cioè funzioni olomorfe $f: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tali che esiste un punto p in arrivo per cui $f^{-1}(p)$ consiste di un unico punto.

Il problema di dare una classificazione topologica delle applicazioni polinomiali è stato ridotto ad un problema combinatorico da Davis e Thom, più precisamente nel 1957 C. Davis ha dimostrato che per ogni scelta di n numeri reali distinti esiste un polinomio di grado $(n+1)$ che ha tali punti come valori critici e una questione simile viene posta nel caso dei polinomi complessi. Thom nel 1965 ha osservato che grazie al teorema di esistenza di Riemann, per ogni scelta di n numeri complessi distinti e di una classe di monodromia ammissibile, esiste esattamente un polinomio, a meno di trasformazioni affini in partenza, che ha questi punti come valori critici e la data monodromia. In [4] è data una descrizione di tutti i grafi della monodromia dei polinomi reali generici.

Descriviamo più precisamente la riduzione del problema topologico dello studio delle componenti connesse dello spazio di Hurwitz generico reale ad un problema combinatorico. Sia $f: \mathcal{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ una funzione algebrica generica, sappiamo che il numero dei valori critici di f è determinato dalla formula di Riemann Hurwiz ed è $2g + 2d - 2$. Sia $\mathcal{B}$ un insieme finito in $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ e supponiamo che 0 e ∞ non siano in $\mathcal{B}$. Allora per il teorema di esistenza di Riemann sappiamo che c'è una bigezione tra:

1. l'insieme delle classi di coniugio degli omomorfismi $\mu : \pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \mathcal{B}, 0) \to S_d$ tali che $Im(\mu)$ sia un sottogruppo transitivo e fissata una base $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ del gruppo libero $\pi_1(\mathbf{C} - \mathcal{B}, 0)$, $\mu(\gamma_i) = \sigma_i$ è una trasposizione, il prodotto $\sigma_1 \ldots \sigma_n = id$ e

2. l'insieme delle classi di equivalenza delle funzioni algebriche f di grado d che sono generiche e con luogo di diramazione uguale a $\mathcal{B}$.

Fissiamo una base geometrica $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ di $\pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \mathcal{B}, 0)$. Poi associamo alla classe, modulo automorfismi interni di S_d, della monodromia di una funzione algebrica generica $f : \mathcal{C} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ di grado d un grafo connesso con d vertici e $2g + 2d - 2$ lati etichettati in modo che i vertici corrispondano ai punti nella fibra $f^{-1}(0)$, il lato con etichetta i connetta due vertici se e solo se sono scambiati da $\mu(\gamma_i)$.

Se f è reale, $\mathcal{B}$ è autoconiugato, inoltre dire che f è reale significa che, se $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ è la base scelta di $\pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \mathcal{B}, 0)$, allora esiste un'involuzione α sull'insieme $f^{-1}(0)$ tale che $\cup i$, $\mu(\overline{\gamma_i}) = \alpha\mu(\gamma_i)\,\alpha$.

Uno dei risultati principali della tesi è la descrizione completa dei grafi della monodromia associati alle funzioni algebriche reali e generiche.
Inoltre vengono descritte anche le monodromie di tali funzioni algebriche reali che hanno tutti i valori critici generici, eccetto al più ∞ che può non essere generico.

A tale proposito citiamo un lavoro di Arnold (cf. [1]) che si occupa del caso delle funzioni razionali complesse con valori critici tutti generici eccetto ∞ la cui controimmagine consiste di due punti. Più precisamente nel 1996 Arnold ha dato una formula che calcola il numero di tali grafi (nel caso complesso) in dipendenza dalle moltiplicità dei due poli.

Il caso più generale in cui f è una funzione razionale complessa con ∞ come unico punto critico non generico è stato recentemente risolto da Goryunov e Lando, che hanno così dimostrato il caso di genere 0 di una congettura di Hurwitz del 1891 (cf. [5]).

Nella tesi è data inoltre una generalizzazione dei risultati ottenuti in [4] al caso delle funzioni algebriche lemniscato generiche. Una funzione algebrica lemniscato generica è una funzione algebrica generica i cui valori critici hanno tutti i valori assoluti distinti (cf. [2]). Indichiamo con $H\mathcal{L}_{g,d}$ lo spazio di Hurwitz delle funzioni algebriche (complesse) lemniscato generiche $f : \mathcal{C} \to \mathbf{P}^1$ di grado d, dove $\mathcal{C}$ è una superficie di Riemann compatta e connessa di genere g.

Nella tesi dimostriamo che il numero $\beta_{g,d}$ di componenti connesse di $H\mathcal{L}_{g,d}$ è uguale al numero $n(g, d)$ di classi di isomorfismo dei grafi della monodromia delle funzioni algebriche reali generiche con tutti i valori critici reali, di cui abbiamo dato una descrizione completa.

Nel caso in cui f sia reale generica e con tutti i valori critici reali riusciamo a calcolare con l'aiuto del computer il numero dei grafi per alcuni valori del genere g e del grado d e diamo una formula che calcola il numero di tali grafi per $d = 3$ e genere qualunque.

Un altro problema trattato è quello di mettere in relazione la descrizione combinatorica dello spazio di Hurwitz generico delle funzioni reali con il tipo topologico dell'involuzione antiolomorfa che agisce sulla superficie di Riemann $\mathcal{C}$.

Definiamo innanzitutto cosa si intende per tipo topologico di un'involuzione che non conserva l'orientazione.

Sia Σ una superficie reale orientata compatta e connessa di genere g e sia $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ un'involuzione che non conserva l'orientazione. Indichiamo con Σ_σ il luogo dei punti fissi di σ.

DEFINIZIONE 1. – *Un'involuzione σ che non conserva l'orientazione della superficie Σ si dice di tipo $(g, \nu, a = 0)$ se $\Sigma - \Sigma_\sigma$ non è connesso. Altrimenti σ è di tipo $(g, \nu, a = 1)$. Diciamo che una curva algebrica reale è di tipo $(g, \nu, 0)$, o $(g, \nu, 1)$ a seconda del tipo del suo modello topologico.*

Sia $f : C \to \mathbf{P}^1$ una funzione algebrica reale generica con tutti i valori critici reali, sia σ l'involuzione antiolomorfa che agisce sulla superficie di Riemann $\mathcal{C}$.

Consideriamo il grafo ridotto $\mathcal{G}_{\text{red}}$ del grafo della monodromia $\mathcal{G}$ di f, ossia il grafo ottenuto da $\mathcal{G}$ nel modo seguente: per ogni due vertici rimuoviamo un certo numero di lati di $\mathcal{G}$ che li congiungono in modo tale da lasciare un solo lato che li congiunge. Diciamo che un poligono $\mathcal{P}$ è minimale se non esiste un poligono $\mathcal{P}'$ il cui insieme di vertici è strettamente contenuto nell'insieme dei vertici di $\mathcal{P}$.

Un poligono si dice dispari se ha un numero dispari di vertici.

Con questa notazione siamo in grado di enunciare il seguente

TEOREMA 1. – *Sia X una curva algebrica reale liscia di genere g, $\sigma : X \to X$ l'involuzione antiolomorfa che dà la struttura reale. Supponiamo che $\nu(\sigma) \neq 0$. Sia $f : X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ una funzione algebrica reale generica di grado $d \geq 2$ ($f \circ \sigma(x) = \overline{f(x)}$, $\cup x \in X$)* con tutti i valori critici reali.

Sia $\mathcal{G}$ il grafo della monodromia di f, poniamo $\sigma_* : H_1(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H_1(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Allora

$$dim(\sigma + identity)_* (H_1(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) =$$

$$\#\{poligoni\ minimali\ dispari\ nondegeneri\ in\ \mathcal{G}_{\text{red}}\}.$$

In particolare

$$\nu(\sigma) = g + 1 - \#\{poligoni\ minimali\ dispari\ nondegeneri\ in\ \mathcal{G}_{\text{red}}\}.$$

La seconda parte della tesi tratta alcuni problemi inerenti lo studio dello spazio dei moduli delle curve reali. Innanzitutto descriviamo lo stato attuale della ricerca in questo campo enunciando alcuni risultati noti sullo spazio dei moduli delle classi di isomorfismo (reale) delle curve algebriche lisce reali $M_{\mathbf{R}}^g$, delle curve stabili reali $\overline{M_{\mathbb{R}}^g}$, e sullo spazio dei moduli delle classi di isomorfismo (complesso) delle curve lisce reali $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^g$ e delle curve stabili reali $\overline{\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^g}$.

Tra gli altri risultati riportati enunciamo i teoremi di Seppälä che asseriscono la connessione dello spazio dei moduli complesso $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^1$ delle curve algebriche reali di genere 1 e dello spazio dei moduli complesso delle curve reali iperellittiche e riproduciamo la dimostrazione di Seppälä di quest'ultimo risultato.

Diamo poi i risultati di Buser e di Seppälä che descrivono in che modo si può dare una topologia all'insieme delle classi di isomorfismo reale delle curve stabili reali $\overline{M_{\mathbb{R}}^g}$ in modo che questo sia una compattificazione di $M_{\mathbb{R}}^g$ e riportiamo la dimostrazione della connessione degli spazi $\overline{M_{\mathbb{R}}^g}$, $\overline{\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^g}$.

Infine dimostriamo il seguente

TEOREMA 2. – *Lo spazio dei moduli (complesso) delle curve algebriche reali lisce $\mathfrak{M}_{\mathbb{R}}^g$ è connesso.*

Questo risultato è stato dimostrato anche da Buser, Seppälä e Silhol in [3]. La nostra dimostrazione è stata ottenuta indipendentemente con metodi simili.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. I. ARNOLD, *Topological classification of complex trigonometric polynomials and combinatorics of graphs with equal number of vertices and edges*, Functional Analysis and its Applications, **30** (1996), 118.

[2] I. BAUER and F. CATANESE, *Generic lemniscates of algebraic functions*, Mathematische Annalen, **307** (1997), 417444.

[3] P. BUSER, M. SEPPÄLÄ and R. SILHOL, *Triangulations and moduli spaces of Riemann surfaces with group actions*, Manuscripta Mathematica, 88 (1995), 209-224.

[4] F. CATANESE and P. FREDIANI, *Configurations of real and complex polynomials*, S.M.F. Astérisque, **218**** (1993), 61-93.

[5] A. HURWITZ, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Mathematische Annalen, **39** (1891), 161.

Mathematisches Institut der Universität Göttingen, Göttingen, Deutschland
e-mail: frediani@uni-math.gwdg.de
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Fabrizio Catanese, Università di Göttingen