Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Letizia Scuderi

Risoluzione numerica di equazioni integrali lineari con soluzione non regolare

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 205–208.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_205_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 205-208

Risoluzione numerica di equazioni integrali lineari con soluzione non regolare.

LETIZIA SCUDERI

Molti problemi differenziali con valori assegnati sulla frontiera di un dominio del piano conducono ad equazioni integrali lineari, le cui soluzioni presentano delle singolarità, che non possono essere estratte sottoforma di fattore, quindi incorporate in una funzione peso (non negativa) in modo tale che la rimanente parte sia regolare. Per esempio parecchi problemi fisici danno luogo ad equazioni integrali lineari della forma

$$(1) \qquad (I-K)\,u := u(y) - \int_{-1}^{1} k(x,\, y)\, u(x)\, dx = f(y), \qquad -1 \leq y \leq 1,$$

in cui il nucleo $k(x, y)$ presenta una singolarità di tipo logaritmico ($\log|x-y|$) oppure algebrico ($|x-y|^{\alpha}$, $\alpha > -1$) o più in generale una combinazione di entrambe. Il comportamento di $u(x)$ in $[-1, 1]$ è noto; esso ammette uno sviluppo contenente, oltre alla funzione termine noto $f(x)$, un numero finito di termini debolmente singolari del tipo $(1 \pm x)^i \log^j (1 \pm x)$ o $(1 \pm x)^{i(1+\alpha)+j}$, con $i \geq j$ ed $i \geq 1$, più una funzione regolare, la cui espressione non è nota. Pertanto se f presenta delle irregolarità, la soluzione u ammetterà le stesse singolarità di f; ciò avviene anche se in (1) la funzione k è regolare. Chiaramente in tali situazioni non si può scrivere $u(x)$ nella forma $w(x)v(x)$, ove la funzione peso $w(x)$ include le irregolarità di $u(x)$ e $v(x)$ è regolare. Una fattorizzazione di questo tipo avrebbe consentito di approssimare $v(x)$ in maniera efficiente in $[-1, 1]$ mediante un polinomio algebrico di tipo globale o discretizzare l'integrale Ku mediante una formula di quadratura di tipo interpolatorio, che integri esattamente il nucleo wk (o le sue componenti singolari) ed interpoli la parte regolare della funzione integranda che rimane, mediante un polinomio interpolante di Lagrange. Quando non è possibile una fattorizzazione della soluzione, i metodi più comunemente usati per la risoluzione delle suddette equazioni integrali sono tutti basati su approssimazioni polinomiali a tratti definite su mesh dell'intervallo di integrazione opportunamente graduate, ovvero su partizioni non uniformi del dominio che hanno un maggiore addensamento di punti vicino alle singolarità. Questi metodi consentono di raggiungere un ordine di convergenza ottimale, ma i sistemi lineari che discretizzano l'equazione integrale assegnata e che in pratica forniscono la soluzione dell'equazione, risultano fortemente mal condizionati al crescere del grado locale del polinomio. Per questo motivo, in pratica, cioè in aritmetica con precisione finita di calcolo, accade che aumentando il grado locale del polinomio, l'accuratezza della funzione approssimante la soluzione, non migliora, come le stime teoriche di convergenza garantiscono. In questo caso diventa quindi inevitabile l'uso di precondizionatori. D'altra parte metodi basati su approssimazioni polinomiali di tipo globale non sono competitivi in quanto il loro ordine di convergenza è fisso e relativamente basso, a causa delle singolarità presenti nella soluzione.

In questa tesi di Dottorato viene dimostrato che è possibile risolvere equazioni integrali con soluzioni non regolari, mediante metodi basati su approssimazioni polinomiali algebriche di tipo globale e con ordini di convergenza arbitrariamente elevati, attraverso la risoluzione di sistemi lineari ben condizionati. Si rende ciò possibile, con l'introduzione di un'opportuna trasformazione non lineare nell'equazione integrale, che consente di migliorare il comportamento della soluzione ed eventualmente quello del termine noto. L'aspetto interessante della tecnica proposta è che essa consente di ottenere accurate approssimazioni della soluzione mediante la risoluzione di sistemi lineari di ordine basso e perfettamente condizionati. Ciò rende pertanto i metodi proposti altamente competitivi rispetto a quelli basati su approssimazioni polinomiali di tipo locale, precedentemente menzionati.

L'idea di regolarizzare la soluzione introducendo un cambiamento di variabile non è nuova; tuttavia le trasformazioni che sono state proposte in letteratura si applicano soltanto a problemi molto particolari, per la risoluzione dei quali sono state comunque utilizzate approssimazioni polinomiali di tipo locale definite su mesh uniformi. L'approccio regolarizzante che viene proposto in questa tesi di Dottorato ha invece un'applicabilità molto più generale e ricorre all'approssimazione polinomiale algebrica di tipo globale. Per dimostrare la sua validità e generalità in questa tesi è stato applicato ad alcune equazioni integrali di tipo debolmente singolare e singolare, che possono essere considerate equazioni prototipo di classi più ampie di equazioni integrali a cui il nostro approccio potrebbe applicarsi. La scelta di tali equazioni è dovuta al fatto che esse ammettono soluzione notoriamente singolare agli estremi e/o all'interno dell'intervallo di integrazione, e per esse, finora, gli unici metodi che hanno consentito di raggiungere ordini di convergenza arbitrariamente elevati sono quelli che utilizzano approssimazioni polinomiali a tratti definite su mesh graduate dell'intervallo di integrazione. Osserviamo esplicitamente che l'introduzione di una tecnica regolarizzante, pur migliorando il comportamento della soluzione e quello del termine noto, al contempo complica notevolmente l'espressione originaria del nucleo dell'equazione integrale, facendolo apparire a prima vista intrattabile. Tuttavia, un profondo ed attento studio dell'equazione regolarizzata consente di riscrivere il nucleo trasformato come combinazione o prodotto del nucleo dell'equazione originaria più o per una perturbazione che ha delle singolarità in punti fissi dell'intervallo di integrazione, e quindi di superare in maniera efficiente, anche attraverso l'utilizzo di risultati non standard recentemente apparsi in altri contesti, la difficoltà emersa. Pertanto, sebbene tale approccio risulti applicabile ad un'ampia classe di equazioni integrali con soluzione non regolare, è pur vero che ciascuna delle equazioni regolarizzate e i metodi ad essa applicati richiedono nelle rispettive analisi teoriche, l'utilizzo di tecniche di dimostrazione di tipo diverso e, talvolta, non classico.

Per regolarizzare il comportamento delle soluzioni di tutte le equazioni integrali considerate in questa tesi, abbiamo definito un cambiamento di variabile (non lineare), che si adatta facilmente a vari tipi di singolarità. La suddetta trasformazione viene introdotta, in particolare, nelle equazioni integrali debolmente singolari del tipo (1), che opportunamente trasformate, vengono poi risolte mediante un metodo classico (di proiezione o di tipo Nyström) basato su approssimazioni polinomiali di tipo globale. In questa tesi abbiamo dimostrato la stabilità e la convergenza sia di un metodo di collocazione, sia di un metodo di tipo integrazione-prodotto: entrambi hanno fornito un ordine di convergenza arbitrariamente elevato (vedi anche [2]). I risultati numerici riportati e il confronto di questi con quelli ottenuti mediante il corrispondente metodo definito su mesh graduate pongono chiaramente in evidenza l'efficienza e la superiorità dell'approccio numerico da noi proposto.

Un approccio regolarizzante e un metodo di tipo polinomiale algebrico e globale viene proposto anche per l'equazione integrale di Symm,

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\log|y-x|\,u(x)\,ds(x)=f(y),\qquad y\in\Gamma,$$

definita su un poligono o, più in generale su una curva Γ regolare a tratti, la cui soluzione presenta un comportamento singolare in corrispondenza dei vertici di Γ. Solo di recente è stato proposto in [1] un metodo di collocazione che consente di raggiungere un ordine di convergenza ottimale mediante funzioni spline di ordine arbitrariamente elevato, definite su mesh opportunamente graduate. Noi abbiamo dimostrato che con il nostro approccio regolarizzante è possibile ottenere un ordine di convergenza arbitrariamente elevato anche mediante un metodo polinomiale di tipo algebrico e globale. Attualmente abbiamo dimostrato la stabilità e la convergenza di un metodo lievemente modificato vicino alle singolarità rispetto a quello originariamente proposto. Osserviamo che la modifica apportata è tipica nella trattazione di operatori di tipo Mellin discretizzati, e finora, tutti i metodi numerici, proposti per la risoluzione dell'equazione di Symm sul poligono quando analizzati dal punto di vista teorico vengono opportunamente modificati, se non si vogliono assumere limitazioni troppo restrittive sugli angoli del poligono.

Con un approccio regolarizzante abbiamo risolto anche la seguente equazione integrale

$$u(y)+\frac{4}{\pi}\int_0^1\frac{y^2x}{(x^2+y^2)^2}u(x)\,dx=y,\qquad 0<y\leq 1,$$

la cui soluzione presenta nell'origine una singolarità debole, che non può essere separata dalla restante parte regolare. L'applicazione di un metodo di integrazione-prodotto direttamente all'equazione integrale consente di raggiungere un ordine di convergenza fisso, mentre l'applicazione dello stesso metodo all'equazione regolarizzata ci ha consentito di ottenere un ordine di convergenza arbitrariamente elevato.

Infine abbiamo considerato l'equazione generalizzata di un profilo alare munito di un'aletta,

$$\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{u(x)}{x-y}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,y)\,u(x)\,dx\,dx=f(y),\qquad -1<y<1,$$

ove il primo integrale è da intendersi definito secondo il valore principale di Cauchy, $k(x, y)$ ha una singolarità di tipo logaritmico ed f ammette una discontinuità di I specie in corrispondenza del punto in cui è imperniata l'aletta. Quest'ultima genera una singolarità di tipo logaritmico, nello stesso punto, nella soluzione. Per la suddetta equazione un approccio regolarizzante e la successiva applicazione di un metodo polinomiale algebrico è stato già recentemente proposto in [3]. Invero, in [3], gli autori definiscono una trasformazione non lineare molto semplice che consente di regolarizzare il comportamento della soluzione e considerano per la risoluzione numerica dell'equazione integrale trasformata sia un metodo di collocazione che uno di Galerkin. Essi dimostrano la stabilità e una stima di convergenza di ordine arbitrariamente elevato del metodo di Galerkin e lasciano come problema aperto lo studio teorico del corrispondente metodo di collocazione. Gli eccellenti risultati numerici forniti da quel tipo di approccio, che sembravano garantire la stabilità e la convergenza anche del metodo di collocazione, ci hanno non solo stimolato nella ricerca di una dimostrazione teorica delle suddette proprietà, ma soprattutto ci hanno ispirato nell'applicazione di un analogo approccio regolarizzante per la risoluzione numerica di altri tipi di equazioni integrali con soluzione non regolare, di cui i principali risultati sono stati riportati e descritti in questa tesi di Dottorato. La trasformazione regolarizzante che viene proposta in questa tesi in effetti generalizza quella usata in [3], in quanto consente di regolarizzare simultaneamente più singolarità, interne e/o agli estremi dell'intervallo di integrazione. In questa tesi noi abbiamo dimostrato la stabilità e la convergenza del metodo di collocazione proposto in [3], modificandolo però lievemente nelle vicinanze del flap (vedi anche [4]). Tale modifica (come nel caso dell'equazione di Symm) è stata considerata per poter trattare un operatore di tipo Mellin, presente nell'equazione integrale regolarizzata del profilo alare.

Infine, abbiamo mostrato che la trasformazione regolarizzante da noi proposta consente anche di valutare efficientemente integrali definiti su un intervallo, un triangolo, o più in generale un poligono, di funzioni con singolarità sulla frontiera del dominio di integrazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] Elschner J., Graham I.G., *An optimal order collocation method for first kind boundary integral equations on polygons*, Numer. Math., **70** (1995), 1-31.

[2] Monegato G., Scuderi L., *High order methods for weakly singular integral equations with non smooth input functions*, Math. Comp., **67** (1998), 1493-1505.

[3] Monegato G., Sloan I.H., *Numerical solution of the generalized airfoil equation for an airfoil with a flap*, SIAM J. Numer. Anal., **34** (1997), 2288-2305.

[4] Scuderi L., *A collocation method for the generalized airfoil equation for an airfoil with a flap*, SIAM J. Numer. Anal., **35** (1998), 1725-1739.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino; e-mail: scuderi@polito.it
Dottorato in Matematica Applicata ed Informatica
(sede amministrativa: Università degli Studi di Napoli «Federico II») - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Giovanni Monegato, Politecnico di Torino