Nicoletta Cantarini

Teoria delle rappresentazioni di algebre inviluppanti quantizzate alle radici dell'unità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 17–19.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_17_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 17-19

Teoria delle rappresentazioni di algebre inviluppanti quantizzate alle radici dell'unità.

NICOLETTA CANTARINI

Sia $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{G})$ l'algebra inviluppante quantizzata su $\mathbf{C}$ associata ad un'algebra di Lie semplice, finito-dimensionale $\mathcal{G}$, alla radice primitiva l-esima dell'unità ε, dove l è un intero dispari strettamente maggiore di 1.

In [3], [5] viene provato che le rappresentazioni irriducibili, finito-dimensionali dell'algebra $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{G})$ sono parametrizzate, a meno di isomorfismi, dalle classi di coniugio del gruppo di Lie aggiunto G con algebra di Lie $\mathcal{G}$. Risulta pertanto interessante studiare in che modo la struttura geometrica delle classi di coniugio del gruppo G si riflette sulla struttura algebrica degli $\mathcal{U}_\varepsilon(\mathcal{G})$ — moduli da esse parametrizzati. In particolare De Concini, Kac e Procesi hanno congetturato che se V è un modulo corrispondente ad un'orbita $\mathcal{O}_V$ allora la dimensione di V è divisibile per $l^{1/2 \dim \mathcal{O}_V}$.

Lo scopo principale della tesi consiste nel dimostrare la congettura di De Concini, Kac e Procesi, nel caso in cui $\mathcal{G}$ sia di tipo A_n.

Osserviamo che ogni classe di coniugio in G ha dimensione pari minore o uguale a $2N$, essendo N il numero di radici positive dell'algebra di Lie $\mathcal{G}$. Le orbite di dimensione massima $(2N)$ si chiamano regolari. Per le rappresentazioni parametrizzate da classi di coniugio regolari, la congettura di De Concini, Kac, Procesi è dimostrata in [6]. Inoltre una classificazione completa degli $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(2))$ — moduli irriducibili può essere trovata in [3].

Usando un risultato di De Concini e Kac ([4]) ci si riconduce al caso di moduli unipotenti, cioè moduli parametrizzati da matrici unipotenti di $SL(n+1)$.

Nella tesi dimostriamo la congettura nei seguenti casi:

1) $\mathcal{G}$ di tipo A_n e $l = p$ primo [1].

La congettura di De Concini-Kac-Procesi è l'analogo quantistico di una congettura formulata da Kac e Weisfeiler nel 1971, secondo la quale se $\mathcal{G}$ è un'algebra di Lie semplice, finito-dimensionale, in caratteristica p, la dimensione di ogni $\mathcal{G}$-modulo irriducibile è divisibile per $p^{1/2 \dim \Omega(\chi)}$ dove χ è il p-carattere della rappresentazione e $\Omega(\chi)$ la sua orbita coaggiunta. La dimostrazione della congettura di Kac e Weisfeiler, dovuta ad A. Premet ([8]), viene usata nel capitolo 2 per dimostrare la congettura di De Concini, Kac e Procesi per le rappresentazioni irriducibili dell'algebra $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(n))$, dove ε è una radice p-esima dell'unità. Usando un procedimento di riduzione modulo p associamo ad ogni $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(n))$-modulo irriducibile M, corrispondente ad una classe di coniugio unipotente $\mathcal{O}_M$ di $SL(n)$, una rappresentazione $\overline{M}$ dell'algebra di Lie $sl(n)$ su un campo algebricamente chiuso di caratteristica p, in modo tale che la dimensione di $\overline{M}$ sia uguale alla dimensione di M e la dimensione di $\mathcal{O}_M$ sia uguale alla dimensione dell'orbita coaggiunta del p-carattere di $\overline{M}$.

2) $\mathcal{G}$ di tipo A_n, $\mathcal{O}_V$ un'orbita sottoregolare e $l = p^k$ per qualche primo $p > n+1$, $k \in \mathbf{N}$.

Un $\mathcal{U}_\varepsilon$-modulo si dice sottoregolare se è parametrizzato da un'orbita sottoregolare cioè da un'orbita di dimensione $2N-2$.

Costruiamo gli $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(n+1))$-moduli unipotenti sottoregolari $S_{\underline{\lambda}}$, di peso più alto $\underline{\lambda}$, come segue: sia

$$j : \mathcal{U}_\varepsilon(sl(2)) \hookrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(sl(n+1))$$

l'embedding così definito:

$$j(E) = E_n, \; j(F) = F_n, \; j(K^{\pm 1}) = K_n^{\pm 1}$$

e sia ϱ una rappresentazione irriducibile di $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(2))$ su uno spazio vettoriale V di dimensione $\lambda_n + 1$, con $\lambda_n \in \mathbf{Z}$, $0 \leq \lambda_n \leq l-1$, tale che $\varrho(E_n^l) = 0 = \varrho(F_n^l)$. Sia $v \in V \backslash \{0\}$ un vettore in V tale che $\varrho(K_n)\, v = \varepsilon^{\lambda_n} v$, $\varrho(E_n)\, v = 0$, $\varrho(F_n^{\lambda_n + 1})\, v = 0$ e consideriamo la base B of V, $B = \{v, \varrho(F_n)\, v, \ldots, \varrho(F_n^{\lambda_n})\, v\}$. Sia $\widetilde{\mathcal{U}}$ la sottoalgebra di $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(n+1))$ generata da E_i e K_i per $i = 1, \ldots, n$, F_n, F_α^l per ogni radice positiva α. Dopo aver opportunamente esteso l'azione di $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(2))$ ad un'azione di $\widetilde{\mathcal{U}}$ su V in modo tale che $K_i v = \varepsilon^{\lambda_i}$ con $\lambda_i \in \mathbf{Z}$, $0 \leq \lambda_i \leq l-1$, poniamo $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e definiamo il modulo subregulare indotto:

$$S_{\underline{\lambda}} = \mathcal{U}_\varepsilon(sl(n+1)) \otimes_{\widetilde{\mathcal{U}}} V.$$

Introduciamo la nozione di peso «nice» e stabiliamo i seguenti risultati:

i) se $\underline{\lambda}$ è un peso nice allora $S_{\underline{\lambda}}$ è un modulo irriducibile;

ii) ogni $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(n+1))$-modulo sottoregolare, unipotente, è isomorfo a $S_{\underline{\lambda}}$ per qualche $\underline{\lambda}$ nice;

iii) due moduli irriducibili, sottoregolari, $S_{\underline{\lambda}}$ e $S_{\underline{\mu}}$ sono isomorfi se e solo se $\underline{\lambda}$ e $\underline{\mu}$ sono «linked» attraverso un elemento w appartenente al sottogruppo $\mathcal{W}_{12\ldots n-2}$ del gruppo di Weyl generato dalle riflessioni $s_1, \ldots, s_{n-2}$.

In questo modo parametrizziamo i moduli irriducibili, sottoregolari, attraverso le $\mathcal{W}_{12\ldots n-2}$-orbite di pesi nice, rispetto all'azione «dot». Come corollario di questa classificazione otteniamo una dimostrazione della congettura di De Concini, Kac e Procesi.

Osserviamo che la classificazione dei moduli subregolari così ottenuta è perfettamente coerente con la classificazione delle rappresentazioni irriducibili dell'algebra di Lie $sl(n)$ su un campo algebricamente chiuso di caratteristica positiva $p > n$, ottenuta da A. N. Panov.

La situazione analoga in caratteristica positiva è descritta da Jantzen ([7]) usando i risultati di Premet che non sono disponibili nel caso quantum.

3) $\mathcal{G}$ di tipo A_n e $\mathcal{O}_V$ orbita sferica unipotente.

Le orbite sferiche unipotenti sono le classi di coniugio unipotenti di $SL(n+1)$ geometricamente descritte da diagrammi di Young con 2 colonne; la loro dimensione è limitata da $l(w_0) + rk(1 - w_0)$, essendo w_0 l'elemento di massima lunghezza nel gruppo di Weyl. Otteniamo che tutte le informazioni riguardanti queste rappresentazioni sono contenute in una sottoalgebra di Borel B_ε di $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(n+1))$ e questo risulta riflettere la geometria delle classi di coniugio sferiche.

Usando il teorema di riduzione al caso unipotente proviamo la congettura di De Concini, Kac, Procesi per gli $\mathcal{U}_\varepsilon(sl(n))$-moduli parametrizzati dalla classe di coniugio $\mathcal{O}_g$ di un elemento $g = g_s \cdot g_u$ la cui parte unipotente g_u appartiene ad un'orbita sferica.

Un ruolo fondamentale viene svolto dalla descrizione delle celle di Schubert di una Grassmanniana in termini di coordinate Plückeriane.

Concludiamo sottolineando che ognuno dei casi sopra descritti ha richiesto l'impiego di tecniche ed idee tra loro completamente differenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cantarini N., *Mod-p reduction for quantum groups*, Journal of Algebra, **202** (1998), 357-366.

[2] Cantarini N., *The quantized enveloping algebra $\mathcal{U}_q(sl(n))$ at the roots of unity*, Preprint n. 1.187.1068 dell'Università di Pisa (Settembre 1997).

[3] De Concini C. and Kac V. G., *Representations of quantum groups at roots of 1*, Progress in Math., **92** (1990), 471-506.

[4] De Concini C. and Kac V. G., *Representations of quantum groups at roots of 1: reduction to the exceptional case*, International Journal of Modern Physics, **7** (1992), 141-149.

[5] De Concini C., Kac V. G. and Procesi C., *Quantum Coadjoint Action*, Journal of the American Mathematical Society, **5** (1992), 151-190.

[6] De Concini C., Kac V. G. and Procesi C., *Some Remarkable Degenerations of Quantum Groups*, Comm. Math. Physics, **157** (1993), 405-427.

[7] Jantzen J. C., *Subregular nilpotent representations of $sl(n)$ and so_{2n+1}*, Manuscript (1997).

[8] Premet A., *Irreducible Representations of Lie Algebras of Reductive Groups and the Kac-Weisfeiler Conjecture*, Invent. Math., **121** (1995), 79-117.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa; e-mail: cantarin@dm.unipi.it
Dottorato in matematica (sede amministrativa: Pisa) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Corrado De Concini, Università La Sapienza di Roma