Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Alessandra Aimi

Nuovi schemi di integrazione numerica per la soluzione di equazioni integrali (iper)singolari con il metodo di Galerkin agli elementi di contorno

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 177–179.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_177_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 177-179

Nuovi schemi di integrazione numerica per la soluzione di equazioni integrali (iper)singolari con il metodo di Galerkin agli elementi di contorno.

ALESSANDRA AIMI

Oggetto della tesi è la realizzazione, l'analisi e l'applicazione di nuovi schemi di quadratura numerica per la risoluzione di equazioni integrali singolari ed ipersingolari con il metodo di Galerkin agli elementi di contorno. Come è noto ([1]), una soluzione approssimata di alcuni problemi al contorno può essere ottenuta attraverso la loro riformulazione in termini di equazioni integrali definite sul contorno del dominio (**BIE**) da risolversi con un metodo agli elementi di contorno (**BEM**). La formulazione integrale tradizionale si basa sulla soluzione fondamentale dell'operatore differenziale, e la sua classica versione discreta è ottenuta con il metodo di collocazione per il BEM. Questa tecnica è particolarmente efficiente per la risoluzione di problemi definiti su geometrie irregolari o per problemi esterni, come per esempio lo scattering di onde elastiche o acustiche.
Le equazioni integrali, utilizzate per modellare questa ampia classe di problemi, contengono integrali al più fortemente singolari, cioè con singolarità di tipo Cauchy (**CBIE**). In realtà, in alcune applicazioni come la meccanica della frattura, è più conveniente utilizzare il gradiente delle CBIE. Questo implica integrali con nuclei ipersingolari, cioè integrali con una singolarità più forte di quella di Cauchy. Le equazioni integrali al contorno corrispondenti sono dette ipersingolari (**HBIE**). Inoltre, negli ultimi anni, una formulazione integrale alternativa, detta formulazione integrale simmetrica, basata sull'accoppiamento di CBIE con HBIE, è stata introdotta, studiata e utilizzata con successo fornendo alcuni importanti vantaggi per esempio nelle seguenti aree di ricerca: problemi a potenziale, elasticità lineare, meccanica della frattura, elastoplasticità, viscoelasticità, elastodinamica, conduzione del calore in regime transiente. Questa formulazione, la cui soluzione è approssimata con il metodo di Galerkin agli elementi di contorno piuttosto che con il metodo di collocazione, permette un'interessante caratterizzazione variazionale della soluzione del sistema di equazioni integrali, anche se l'utilizzo del Galerkin BEM richiede un pesante processo di doppia integrazione.

Le strategie generalmente proposte per questa integrazione sono sostanzialmente basate su una tecnica di regolarizzazione che riduce l'ordine della singolarità ma richiede molto lavoro analitico prima di procedere con l'integrazione numerica di funzioni al più debolmente singolari. Pertanto tali strategie rimangono limitate a casi particolari di nuclei, contorni e approssimanti.

Il lavoro di ricerca, presentato nella tesi, riguarda la realizzazione di nuovi schemi di quadratura numerica per integrali debolmente singolari, fortemente singolari (a valor principale di Cauchy) e ipersingolari (a parte finita di Hadamard) che nascono nella risoluzione di BIE con il metodo di Galerkin agli elementi di contorno, basato su approssimanti polinomiali a tratti di grado locale arbitrario. Tale metodo prevede infatti il calcolo di integrali doppi della forma

$$\int_{\Gamma} \phi_j(\mathbf{x}) \int_{\Gamma} K(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \phi_i(\mathbf{y})\, \mathrm{d}\Gamma_y \mathrm{d}\Gamma_x,$$

dove Γ è il contorno del dominio, $\{\phi_i\}$ è una base di funzioni di forma associate ad una partizione di Γ, utilizzata per l'approssimazione della soluzione, e $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ è un nucleo debolmente singolare, singolare o ipersingolare, cioè con singolarità rispettivamente di tipo $\log r$, $1/r$ e $1/r^2$, dove $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.

Dopo una presentazione di problemi a potenziale e di elasticità lineare nella loro formulazione integrale simmetrica e della corrispondente discretizzazione ottenuta con il metodo di Galerkin agli elementi di contorno, la prima parte della tesi è dedicata alla illustrazione di formule di quadratura prodotto di tipo interpolatorio per nuclei logaritmici o razionali, di una formula di tipo Radau per l'approssimazione di integrali a parte finita di Hadamard e di una formula per l'approssimazione di integrali di funzioni analitiche nell' intervallo di integrazione con singolarità deboli agli estremi. Per ciascuna di queste formule di quadratura sono dati risultati di convergenza. Inoltre, sono introdotti schemi di integrazione numerica per problemi bidimensionali che permettono la valutazione del sistema lineare di Galerkin con l'usuale tecnica FEM, cioè lavorando elemento per elemento sulla decomposizione di contorni con rappresentazione parametrica regolare a tratti (i domini poligonali sono trattati come caso particolare). Questi schemi di quadratura numerica richiedono all'utente solamente di definire una mesh, non necessariamente uniforme, sul contorno e di specificare il grado locale dell'approssimante ([2], [4]).

Nella seconda parte, sfruttando i risultati di convergenza delle formule di quadratura di base, è stata sviluppata l'analisi di consistenza degli schemi numerici introdotti e sono state ottenute stime asintotiche per l'errore di integrazione. Questo permette di ottenere gli elementi della matrice di Galerkin con la precisione desiderata: infatti, è possibile scegliere a priori il numero dei nodi di quadratura in modo da mantenere l'ordine dell'errore di approssimazione previsto nel metodo di Galerkin agli elementi di contorno. Si è inoltre studiato l'errore causato dalla linearizzazione di due elementi di contorno consecutivi ma con diversa rappresentazione parametrica ([5]).

Per verificare l'efficienza di questi schemi di quadratura, sono state effettuate diverse simulazioni numeriche riguardanti problemi a potenziale, di elasticità lineare, di meccanica della frattura ([2], [3], [5]). Nella terza parte della tesi sono presentati i risultati ottenuti: l'accordo con le stime di accuratezza note in letteratura è effettivamente buono.

In conclusione, si vuole sottolineare il fatto che gli schemi di quadratura numerica proposti per CBIE e HBIE definite su contorni di domini bidimensionali sono di ampia applicabilità: possono essere utilizzati per diversi nuclei che presentino i tipi di singolarità trattati. Inoltre, essi sono effettivamente adatti alla implementazione di differenti versioni del metodo di Galerkin agli elementi di contorno: risultano infatti efficienti sia per la classica versione $h-$, che raggiunge l'accuratezza raffinando la mesh su Γ, mantenendo gradi p bassi della base polinomiale locale, sia per la versione $p-$, che mantiene fissa la mesh e raggiunge l'accuratezza incrementando il grado p, sia per la versione $h-p$ che combina i due approcci precedenti. Inoltre, gli schemi introdotti permettono la costruzione di routines adattive, dove la dimensione h dell'elemento di contorno e il grado locale p dell'approssimante sono scelti automaticamente. L'accuratezza ottenuta, nei vari casi, è evidente nei risultati numerici proposti.

BIBLIOGRAFIA

[1] Chen G. and Zhou J., *Boundary Element Methods*, Academic Press, London (1992).

[2] Aimi A., Diligenti M. and Monegato G. *New Numerical Integration Schemes for applications of Galerkin BEM to 2D problems*, Int. J. Numer. Methods Eng., **40** (1997), 1977-1999.

[3] Aimi A., Carini A. and Diligenti M., *Numerical integration schemes for evaluation of (hyper)singular integrals in 2D BEM*, Proc. I.A.B.E.M. Workshop - Fundamental solutions in Boundary elements: formulation and integration, Siviglia (1997), 185-204.

[4] Aimi A., Diligenti M. and Monegato G., *Numerical integration schemes for evaluation of (hyper)singular integrals in 2D BEM*, Comp. Mech., **22** (1998), 1-11.

[5] Aimi A. and Diligenti M., *Error analysis for singular integral evaluation on piecewise smooth curves in Galerkin BEM*, Riv. Mat. Univ. Parma (6), **1** (1998), in corso di stampa.

Dipartimento di Matematica, Università di Parma; e-mail: aimi@prmat.math.unipr.it
Dottorato in Matematica Computazionale e Ricerca Operativa
Sede amministrativa: Università di Milano - Ciclo X
Direttore di ricerca: Prof. Mauro Diligenti, Università di Parma