Bollettino
Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Andrea Terracina

Applicazioni di teoremi di confronto per leggi di conservazione con condizioni al bordo

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 151–154.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_151_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 151-154

Applicazioni di teoremi di confronto per leggi di conservazione con condizioni al bordo.

ANDREA TERRACINA

In questa tesi sono trattati problemi misti per leggi di conservazione.
Una legge di conservazione iperbolica scalare è un'equazione del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 ,$$

dove u rappresenta una funzione definita in un dominio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ a valori reali e $f \in C^1(\mathbb{R})$. Tale equazione proviene dallo studio di modelli fisici in cui la funzione u rappresenta la densità di una grandezza che si conserva. Il problema di Cauchy associato alla legge di conservazione consiste nel cercare una funzione u che risolva tale equazione differenziale in tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, assumendo il dato iniziale u_0 su $\mathbb{R} \times \{0\}$. È noto in letteratura che, in generale, il problema di Cauchy non ha soluzione classica. Ciò non è dovuto all'eventuale mancanza di regolarità del dato iniziale, bensì è legato alla natura non lineare dell'equazione. È necessario quindi considerare la formulazione debole del problema. In tal caso è sufficiente che la soluzione sia L^∞. Rispetto alla formulazione debole il problema di Cauchy è mal posto, infatti applicando il metodo delle caratteristiche si possono esibire esempi di non unicità per esso. Bisognerà individuare tra tutte le soluzioni deboli quella fisicamente accettabile. A tale proposito viene introdotto il concetto di soluzione entropica [2]. In questo contesto si limitano le discontinuità ammissibili (shock) per la soluzione.

La proprietà essenziale delle curve di discontinuità, è che esse non generano nuove caratteristiche classiche, al contario sono le caratteristiche a convergere su tali curve. Questo fa sì che ci sia una perdita di informazione e quindi aumento di «entropia fisica» ogni volta che compare un nuovo shock. È bene sottolineare che l'entropia in cui si fa riferimento nelle leggi di conservazione è di segno opposto rispetto all'«entropia fisica» e quindi tende a diminuire quando si genera una nuova discontinuità.

Nel caso in cui il dato iniziale u_0 sia di classe L^∞ esistono risultati di esistenza ed unicità della soluzione entropica del problema di Cauchy [2].

È chiaro che ci troviamo in un contesto di estrema irregolarità per le soluzioni, ciò continuerà a valere per un problema misto del tipo

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } I \times [0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } I \times \{0\} \\ u_{|\partial I} = a_0 & \text{in } \partial I \times (0, T), \end{cases}$$

dove $u_0 \in C^1(I)$, $a_0 \in C^1(\partial I \times (0, T))$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ ed I è un intervallo aperto strettamente contenuto in $\mathbb{R}$. In questo caso il problema si complicherà per la presenza delle condizioni al bordo. È evidente già nel caso in cui la funzione f sia lineare che, in generale, il dato al bordo non può essere assunto in senso classico. Per convicersi di ciò è sufficiente considerare un flusso lineare del tipo $f(u) = \lambda u$, con λ costante reale.

Ovviamente la situazione è molto più complessa nel caso in cui il flusso f sia non lineare. La formulazione generale per il problema misto (1) è stata data in [1] partendo dall'idea euristica di approssimare il problema iperbolico con uno parabolico in cui i termini diffusivi tendono a scomparire. Dal momento che il problema misto di Dirichlet è ben definito per le equazioni di tipo parabolico, lo stesso permette di dare una formulazione per le condizioni al bordo del problema (1).

In ogni punto di $\partial I \times (0, T)$ la traccia della soluzione (ci si pone nella classe funzionale BV) dove appartenere ad un insieme di compatibilità, individuato dal valore del dato al bordo nel punto e dalla funzione f.

Nello studio del problema misto si presentano sostanzialmente due difficoltà. La prima è dovuta alla mancanza di regolarità delle soluzioni, come nel caso del problema di Cauchy. La seconda è legata alla inusuale interpretazione delle condizioni al bordo. Uno strumento molto efficace per lavorare nell'ambito del problema misto è fornito dalle tecniche di confronto tra le soluzioni.

A tale proposito nella tesi, usando le tecniche di Kružkov [2], si dimostra un teorema di confronto delle soluzioni del problema misto (1) rispetto ai dati [5].

Questo permette di estendere i risultati di esistenza ed unicità, dimostrati in [1] nel caso di dati C^2, al caso di dati $BV_{\mathrm{loc}} \cap L^\infty$.

Tra le applicazioni del metodo di confronto trattate nella tesi c'è lo studio di un problema di frontiera libera per leggi di conservazione che proviene da un modello di ion–etching per la costruzione di mezzi semiconduttori [4].

Tale problema consiste, formalmente, nel cercare una coppia $(s, u) \in Lip((0, T)) \times (BV(\Lambda) \cap L^\infty(\Lambda))$ soluzione di

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \Lambda(s(t), T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \{0\} \\ s'(t) = \dfrac{f(u(s(t), t))}{u(s(t), t) + c}, & \end{cases}$$

dove c è una costante positiva, il dominio $\Lambda := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T) : 0 \leq t < T, s(t) < x\}$ mentre la funzione f, detta «funzione di sputtering», dipende dalla struttura del materiale semiconduttore che si considera e verifica delle opportune proprietà. Si tratta di una problematica nuova per leggi di conservazione.

Come primo risultato si dimostra l'esistenza di soluzioni regolari del problema (2) per tempi piccoli.

Per studiare il problema per tempi arbitrariamente grandi è evidente, per quanto detto in precedenza, che bisognerà considerare una formulazione entropica del problema (2). D'altra parte anche in quest'ambito, ci si accorge che il problema è mal posto in quanto c'è mancanza di unicità [4]. Bisognerà imporre delle condizioni aggiuntive, a tale scopo sarà utile vedere il problema nell'ottica delle condizioni al bordo. Partendo dalle considerazioni fatte in [4] per il problema (2) con dati iniziali costanti, nella tesi viene data una formulazione entropica del problema di frontiera libera (2) nel caso di dati iniziali non negativi appartenenti allo spazio BV. Vengono dimostrati risultati di esistenza, unicità per il problema di frontiera libera (2) per un ampia classe di dati iniziali.

In particolare supponendo che il flusso f sia una funzione decrescente in $\mathbb{R}^+$, ipotesi molto naturale nel modello di ion–etching, sono dimostrati risultati di esistenza, unicità per dati iniziali nella classe BV. Sempre in tale contesto valgono risultati di dipendenza continua e di confronto rispetto ai dati iniziali.

Le tecniche di confronto permettono inoltre di fare un'analisi qualitativa per il comportamento asintotico della frontiera s.

Questo può essere un modello guida per problemi più generali di frontiera libera per leggi di conservazione.

Un'altra applicazione considerata nella tesi consiste nello studiare un'approssimazione di rilassamento di tipo cinetico per leggi di conservazione con condizioni al bordo.

Si considera un sistema con rilassamento di tipo (BGK) a due velocità per il problema misto (1) ($I = \mathbb{R}^+$). Questi tipo di sistemi è stato introdotto in [3]. L'idea proviene dalla teoria cinetica della dinamica dei gas, più precisamente dal fatto che le equazioni della dinamica si possono ottenere a partire dalle equazioni di Bolzmann.

Al variare di $\varepsilon > 0$ il sistema è dato da

$$\tag{3} \begin{cases} (u_1)_t + \lambda_1 (u_1)_x = \dfrac{1}{\varepsilon}(M_1(u_1+u_2) - u_1) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0, T) \\ (u_2)_t + \lambda_1 (u_2)_x = \dfrac{1}{\varepsilon}(M_2(u_1+u_2) - u_2) & \text{in } \mathbb{R}^+ \times (0, T) \\ u_i(x, 0) = M_i(u_0(x)) \quad i = 1, 2 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \{0\} \\ u_i(0, t) = M_i(a_0(t)) \quad i = 1, 2 & \text{in } \{0\} \times (0, T). \end{cases}$$

Dove le M_i sono le componenti di una Maxwelliana e le velocità λ_i sono entrambe positive e verificano $\lambda_1 < f'(u) < \lambda_2$ per ogni u in $\mathbb{R}$.

Osserviamo che in tal caso il flusso f è strettamente crescente. In tale situazione il dato al bordo è effettivamente assunto dalla soluzione entropica del problema misto (1).

Nella tesi si dimostra, in analogia con [3] (problema di Cauchy), che il sistema (3) rilassa sul problema (1), ovvero che la somma delle soluzioni $u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon$ del sistema rilassante (3) converge in norma $C((0, T), L^1_{loc}(\mathbb{R}))$ alla soluzione del problema misto (1). Per poter passare al limite dovremo fare delle stime a priori, indipendenti da ε, per le soluzioni del problema con rilassamento. A tale scopo faremo uso di un risultato di confronto e dipendenza continua dai dati valido per il problema (3). Grazie a questo potremo ricondurci a fare le stime nel caso in cui le soluzioni del sistema rilassante siano regolari.

L'ipotesi che le velocità λ_i siano positive è essenziale affinché valga il risultato di convergenza sopra citato. In realtà, si può osservare che, se le velocità non sono entambe positive il problema (3) è mal posto.

L'interesse per questo tipo di rilassamento è evidente da un punto di vista teorico, in quanto ci consente di approssimare il problema di leggi di conservazione con un sistema lineare del primo ordine debolmente accoppiato.

Come ultima applicazione delle tecniche di confronto abbiamo studiato il comportamento asintotico per la legge di bilancio

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = g(u),$$

per ogni (x, t) appartenente al dominio $(0, L) \times (0, \infty)$, dove L è una costante positiva e $g \in C^1(\mathbb{R})$ è lipschitziana. Questa è una legge di conservazione in cui a secondo membro è presente un termine di sorgente che rappresenta fenomeni di reazione o di dissipazione. Si studia il problema misto per questa equazione ponendo dei dati costanti sugli insiemi $\{0\} \times (0, \infty)$ e $\{L\} \times (0, \infty)$ ed un dato iniziale u_0 su $(0, L) \times \{0\}$.

Sotto opportune ipotesi sul flusso f e sulla sorgente g, in particolare si assume che la funzione f sia convessa, si analizza il comportamento asintotico per tempi grandi della soluzione. Un fenomeno interessante da evidenziare, che non si verifica per il problema di Cauchy e che infatti è dovuto alla presenza di condizioni al bordo, è il fatto che la soluzione diventa in tempo finito stazionaria. Utilizzando tecniche di confronto si può studiare l'eventuale instabilità delle soluzioni stazionarie.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARDOS C., LE ROUX A.Y. and NEDELEC J.C., *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm.in Partial Differential Equations, **4** (1979), 1017-1034.

[2] KRUŽKOV S.N., *First order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR Sbornik, **10** (1970), 217-243.

[3] NATALINI R., *A Discrete Kinetic Approximation of Entropy Solutions to Multidimensional Conservation Laws*, J. Differential Equations, **148** (1998), 292-313.

[4] ROSS D.S., *Two new boundary problems for scalar conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math, **41** (1988), 725-737.

[5] TERRACINA A., *Comparison properties for scalar conservation laws with boundary conditions*, Nonlinear Anal., **28** (1997), 633-653.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma «La Sapienza»
e-mail: terracin154mat.uniroma1.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. A. Tesei, Università di Roma «La Sapienza»