BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

FRANCESCA BENANTI

Algebre con identità polinomiali: descrizione di alcuni T-ideali dell'algebra libera

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 13–16.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_13_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 13-16

Algebre con identità polinomiali: descrizione di alcuni T-ideali dell'algebra libera.

Francesca Benanti

Sia F un campo di caratteristica zero ed $F\langle X\rangle$ l'algebra associativa libera di rango numerabile sull'insieme $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Sia A un'algebra associativa su F ed $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$. Diremo che f è una *identità polinomiale* per A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ per ogni $a_1, \ldots, a_n \in A$. L'insieme $T(A)$ delle identità polinomiali dell'algebra A costituisce un T-ideale di $F\langle X\rangle$, cioè un ideale dell'algebra libera invariante rispetto a tutti gli endomorfismi di $F\langle X\rangle$. Inoltre, è ben noto che se U è un T-ideale di $F\langle X\rangle$ allora $U = T(A)$ per qualche F-algebra A. Se A soddisfa una identità polinomiale non nulla (cioè $T(A) \neq (0)$) diremo che A è una *PI-algebra*.

Il lavoro svolto in questa tesi riguarda lo studio delle identità polinomiali della algebra delle matrici $n \times n$ su un campo F di caratteristica zero. Particolare cura è rivolta alla descrizione del T-ideale dell'algebra della matrici di ordine tre, $T(M_3(F))$, e allo studio del T-ideale generato dal polinomio standard s_n il cui ruolo risulta fondamentale nella determinazione delle identità polinomiali di $M_n(F)$. Le tecniche sviluppate per la descrizione di quest'ultimo T-ideale sono utilizzate, infine, per studiare il T-ideale generato dal polinomio x^n.

Il T-ideale delle identità dell'algebra delle matrici $M_n(F)$ ricopre un ruolo basilare nella teoria delle PI-algebre. Infatti, dai risultati di struttura e di classificazione sui T-ideali ottenuti da Kemer [4], lo studio di un generico T-ideale è ricondotto allo studio dei T-ideali delle identità polinomiali delle seguenti algebre

$$F, \quad F\langle X\rangle, \quad M_n(F), \quad M_n(E), \quad M_{k,l}(E),$$

dove $E = E_0 \oplus E_1$ è l'algebra esterna o di Grassmann e

$$M_{k,l}(E) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k & l \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ l \end{array} & \begin{pmatrix} E_0 & E_1 \\ E_1 & E_0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Vista l'importanza del T-ideale delle identità polinomiali dell'algebra delle matrici $n \times n$ nella teoria delle PI-algebre risulta interessante lo studio di identità esplicite per l'algebra delle matrici $M_n(F)$.

Un ruolo fondamentale nel T-ideale $T(M_n(F))$ è svolto dal polinomio standard

$$s_n = s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

Nel 1950, Amitsur e Levitzki provarono che il polinomio standard di grado $2n$ è la sola identità polinomiale di grado minore o uguale a $2n$ per l'algebra delle matrici $M_n(F)$. Nel 1973, Leron dimostrò che per $n > 2$ tutte le identità polinomiali di grado $2n+1$ per $M_n(F)$ sono conseguenza dell'identità standard s_{2n}. Questo risultato fu migliorato da Drensky e Kasparian, nel 1983 essi dimostrarono che tutte le identità di grado $2n+2$ sono conseguenze dell'identità standard s_{2n}, per $n = 3$. È interessante ricordare che, per $n = 2$, è stata determinata una base finita di $T(M_n(F))$ costituita da due polinomi ed s_{2n} costituisce uno degli elementi di questa base. Il problema di descrivere le identità polinomiali di $M_n(F)$ e di trovare una base per $T(M_n(F))$, per $n > 2$, è ancora aperto per cui notizie sul T-ideale generato dall'identità standard potrebbero essere utili in tal senso.

Un metodo efficace per lo studio delle identità polinomiali è quello di descrivere gli spazi delle identità nel linguaggio delle rappresentazioni del gruppo simmetrico S_n. È ben noto che, su un campo di caratteristica zero, ogni T-ideale è generato dai suoi elementi multilineari, dunque, se denotiamo con V_n lo spazio vettoriale di tutti i polinomi multilineari di grado n in $x_1, \ldots, x_n$, studiare un T-ideale U è equivalente a studiare $U \cap V_n$ per ogni n. Il gruppo simmetrico S_n agisce da sinistra su V_n come segue

$$\sigma(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_n)},$$

dove $\sigma \in S_n$ e $x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in V_n$. Sotto questa azione V_n è un S_n-modulo e $U \cap V_n$ è un S_n-sottomodulo di V_n. Il carattere $\chi_n(A) = \chi_{S_n}(V_n/T(A) \cap V_n)$ è detto *n-esimo cocarattere* di A, dove A è una generica PI-algebra.

La descrizione della successione dei cocaratteri $\{\chi_n(A)\}_{n>1}$ di una PI-algebra A è uno dei metodi maggiormente sviluppati per lo studio delle identità soddisfatte da A. Dalla teoria di Young Frobenius esiste, in caratteristica zero, una corrispondenza biunivoca fra i caratteri irriducibili di S_n e le partizioni di n, inoltre, per la completa riducibilità (teorema di Maschke), si ha la seguente decomposizione per una generica PI-algebra A

$$\chi_n(A) = \chi_{S_n}(V_n/(T(A) \cap V_n)) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Part}(n)} m_\lambda \chi_\lambda,$$

dove χ_λ è il carattere irriducibile di S_n associato alla partizione λ. Dunque lo studio del T-ideale di una generica PI-algebra A può essere affrontato descrivendo la successione dei cocaratteri $\{\chi_n(A)\}_{n>1}$ ovvero determinando le molteplicità m_λ che compaiono nella decomposizione di tali caratteri.

Un primo risultato nello studio dei cocaratteri dell'algebra delle matrici

$M_n(F)$ fu dato da Regev [7]. Egli dimostrò la seguente uguaglianza

$$\chi_n(M_k(F)) = \sum_{\lambda \in \Lambda_{k^2}(n)} m_\lambda \chi_\lambda,$$

dove $\Lambda_{k^2}(n)$ è l'insieme delle partizioni λ di n contenute nella striscia di ampiezza k^2. L'esplicita espressione di $\chi_n(M_2(F))$ fu determinata da Formanek [3] e da Drensky [1]. In questa tesi si studia $\chi_n(M_3(F))$ e si determinano tutte le partizioni λ di n per le quali $m_\lambda \neq 0$, più precisamente si ottiene

$$\chi_n(M_3(F)) = \sum_{\lambda \in \Lambda_9(n),\, \lambda \notin \Lambda} m_\lambda \chi_\lambda,$$

dove $\Lambda = \{(1^9), (1^8), (1^7), (1^6), (2, 1^8)\}$.

Essenziale per la prova di tale risultato è l'uso della tecnica di "incollaggio" di diagrammi di Young esposta da Regev in [8] e l'implementazione di algoritmi computazionali.

L'attenzione dell'autore è, inoltre, rivolta alla descrizione del T-ideale generato dalla identità standard s_n, $\langle s_n \rangle^T$, il cui ruolo, da quanto precedentemente detto, risulta fondamentale nello studio delle identità polinomiali di $M_n(F)$. Nel 1977, Olsson e Regev [6] calcolarono il S_{n+1}-carattere delle conseguenze multilineari di grado $n+1$ di s_n,

$$\chi_{S_{n+1}}(\langle s_n \rangle^T \cap V_{n+1}) = \chi_{(1^{n+1})} + 3\chi_{(2, 1^{n-1})} + \chi_{(2^2, 1^{n-3})} + \chi_{(3, 1^{n-2})}.$$

In questa tesi si determinano tutte le conseguenze di grado $n+2$ di s_n e si calcola il S_{n+2}-carattere delle conseguenze multilineari di grado $n+2$ precisamente, per $n \geqslant 5$

$$\chi_{S_{n+2}}(\langle s_n \rangle^T \cap V_{n+2}) = 2\chi_{(4, 2, 1^{n-4})} + 4\chi_{(4, 1^{n-2})} + 2\chi_{(3, 2^2, 1^{n-5})} + \\ 8\chi_{(3, 2, 1^{n-3})} + 9\chi_{(3, 1^{n-1})} + 4\chi_{(2^3, 1^{n-4})} + 8\chi_{(2^2, 1^{n-2})} + 5\chi_{(2, 1^n)} + \chi_{(1^{n+2})}.$$

Il metodo utilizzato si basa sulla teoria della rappresentazione del gruppo lineare GL_m, che per applicazioni alle PI-algebre è equivalente alla teoria delle rappresentazioni di S_n. Inoltre, essenziale nella ricerca dei polinomi che generano i GL_m-moduli irriducibili associati a partizioni λ presenti nella decomposizione di $\chi_{S_{n+2}}(\langle s_n \rangle^T \cap V_{n+2})$, è lo sviluppo della tecnica introdotta da Drensky e Koshlukov in [2], che determina le conseguenze di grado fissato di un polinomio dato e l'uso di un algoritmo dovuto a Koshlukov [5] per calcoli concreti di vettori di peso massimo.

Infine, da un ulteriore sviluppo delle tecniche utilizzate per lo studio di $\langle s_n \rangle^T$, si ottiene il calcolo del S_k-carattere di tutte le conseguenze multilineari di grado $k \leqslant n+2$ del polinomio x^n e degli espliciti generatori delle componenti irriducibili. In particolare, si hanno i seguenti risultati, per $n \geqslant 6$

$$\chi_{S_{n+1}}(\langle x^n \rangle^T \cap V_{n+1}) = \chi_{(n+1)} + 2\chi_{(n, 1)} + \chi_{(n-1, 2)} + \chi_{(n-1, 1^2)}$$

e

$$\chi_{S_{n+2}}(\langle x^n\rangle^T \cap V_{n+2}) = \chi_{(n+2)} + 5\chi_{(n+1,1)} + 7\chi_{(n,2)} + 5\chi_{(n,1^2)} + 3\chi_{(n-1,3)} + 6\chi_{(n-1,2,1)} + 3\chi_{(n-1,1^3)} + \chi_{(n-2,4)} + \chi_{(n-2,3,1)} + 2\chi_{(n-2,2^2)} + \chi_{(n-2,2,1^2)} + \chi_{(n-2,1^4)}.$$

Osserviamo che l'idea algoritmica che sta alla base di quest'ultime considerazioni potrebbe essere utilizzata per avere notizie più precise sul valore della classe di nilpotenza delle algebre soddisfacenti le ipotesi del teorema di Nagata-Higman. Ricordiamo che l'applicazione di tale teorema migliora notevolmente la dimostrazione di molti risultati di struttura per PI-algebre e questi risultati avrebbero un carattere quantitativo se si conoscesse l'esatto valore della classe di nilpotenza.

BIBLIOGRAFIA

[1] DRENSKY V., *Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras*, J. Algebra, **91** (1984), 1-17.

[2] DRENSKY V. and KOSHLUKOV P. E., *Lie T-ideals with small growth of the sequence of codimensions*, Pliska Stud. Math. Bulg., 8 (1986), 94-100 (Russian).

[3] FORMANEK E., *Invariants and the ring of generic matrices*, J. Algebra, **89** (1984), 178-223.

[4] KEMER A. R., *Ideals of Identities of Associative Algebras*, Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs, 87, (1991).

[5] KOSHLUKOV P. E., *Polynomial identities for a family of simple Jordan algebras*, Comm. Algebra, **16** (1988), 1325-1371.

[6] OLSSON J. and REGEV A. *On the T-ideal generated by a standard identity*, Israel J. Math., **26**, (1977) 97-104.

[7] REGEV A., *Algebras satisfying a Capelli identity*, Israel J. of Math, **33** (1979), 149-154.

[8] REGEV A., *The polynomial identities of matrices in characteristic zero*, Comm. Algebra, 8, (1980) 1417-1467.

Dipartimento di Matematica, Università di Palermo; e-mail: fbenanti@ipamat.math.unipa.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Palermo) - Ciclo IX

Direttore di Ricerca: Prof. A. Giambruno