BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

ELENA SARTORI

Simmetria radiale in alcuni problemi di frontiera libera per operatori ellittici e parabolici degeneri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 139–142.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_139_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 139-142

Simmetria radiale in alcuni problemi di frontiera libera per operatori ellittici e parabolici degeneri.

ELENA SARTORI

Oggetto di questa tesi di dottorato è lo studio, di interesse tanto matematico quanto fisico, della relazione tra sovradeterminazione di un problema ai limiti e geometria del problema stesso. Tale problematica ha generato una intensissima attività di ricerca negli ultimi vent'anni, a partire da due celebrati lavori, il primo in geometria dovuto a A.D. Alexandrov, il secondo in equazioni alle derivate parziali di J. Serrin [8]. Le idee contenute in questi lavori, e in particolar modo quelle sviluppate da Serrin, si sono rivelate estremamente feconde ed influenti, tanto che oggi si parla del metodo dei piani mobili di Alexandrov-Serrin.

Nel lavoro citato, Serrin considera la seguente equazione:

$$\Delta u = -1 \tag{1}$$

in un dominio limitato Ω e dimostra il seguente risultato fondamentale:

TEOREMA 1. – *Sia Ω un dominio limitato con frontiera di classe C^2. Supponiamo che esista una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ che soddisfi l'equazione* (1) *con le seguenti condizioni al contorno:*

$$u = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = b \quad su\ \partial\Omega \tag{2}$$

dove b è una costante e η è la normale a $\partial\Omega$, diretta all'interno di Ω. Allora Ω è una palla.

Possiamo considerare la seguente interpretazione fisica del Teorema 1: quando una sbarra di sezione Ω è soggetta a torsione, l'intensità del corrispondente sforzo tangenziale su $\partial\Omega$ è indipendente dalla posizione su $\partial\Omega$ se e solo se Ω è un cerchio.

Il metodo dei piani mobili, sviluppato per ottenere il risultato, consiste nel dimostrare che per ogni direzione ν in $\mathbf{R}^n$ esiste un iperpiano T_ν ortogonale a ν, tale che il dominio Ω deve essere simmetrico rispetto a T_ν; questa simmetria viene dimostrata riflettendo la soluzione attraverso gli iperpiani ed applicando il principio di massimo forte alla differenza tra la soluzione e la sua riflessa.

Nella seconda parte del lavoro, Serrin estende il risultato di simmetria radiale ad equazioni ellittiche più generali, della forma

$$a(u,\ |Du|)\,\Delta u + h(u,\ |Du|)\,u_i u_j u_{ij} = f(u,\ |Du|) \tag{3}$$

dove a, h, f sono supposte differenziabili con continuità rispetto ai loro argomenti, u_i denota la derivata di u rispetto a x_i e viene usata la convenzione di sommare gli indici ripetuti. Queste equazioni hanno in comune con la (1) l'invarianza rispetto alla rotazione degli assi ed alla riflessione di un asse, proprietà fondamentali per l'utilizzo dei piani mobili in questo ambito. Per la differenza tra due soluzioni non vale il principio di massimo forte, ma un principio di confronto che permette ancora di ricondursi al metodo dei piani mobili.

In una nota all'articolo di Serrin, Weinberger [9] dimostra il Teorema 1 con un altro metodo interessante, basato sull'osservazione che la funzione

$$W = |Du|^2 + \frac{2}{n} u$$

soddisa un principio di massimo quando u è soluzione della (1) ed è costante se u risolve (1), (2). Combinando questa proprietà con la identità integrale di Rellich, notevole conseguenza del teorema della divergenza, viene provata la simmetria radiale della soluzione.

Partendo dai risultati di Serrin e di Weinberger, ci sono stati molti lavori volti a dimostrare simmetria radiale di domini e soluzioni di problemi di frontiera libera sovradeterminati, relativi ad equazioni e domini sempre più generali.

L'attenzione si è focalizzata in particolare sulle equazioni «quasi lineari», il cui modello ellittico è dato dal p-laplaciano:

$$div(|Du|^{p-2} Du) = 0 \quad p > 1 .$$

Quando $|Du|$ va a 0, queste equazioni perdono la loro ellitticità, cosicchè sono dette «degeneri», ovvero, con maggiore precisione, degeneri se $p > 2$ e singolari se $p < 2$. Come conseguenza della loro degenerazione, la maggiore regolarità che ci si può aspettare a priori per le soluzioni è $C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$.

Segnaliamo, tra i lavori su cui si basa più strettamente questa tesi, quello di Alessandrini e Garofalo [2], contenente una generalizzazione del metodo dei piani mobili ad un problema sovradeterminato su un dominio limitato, per l'equazione parabolica degenere

$$u_t - div(a(u, |Du|) Du) = b(u, |Du|) \quad (x, t) \in C_T \tag{4}$$

dove la parte ellittica è modellata sul p-laplaciano; il lavoro [3], in cui viene costruita una funzione analoga a quella di Weinberger per un problema ellittico che estende al caso degenere quello di Serrin e Weinberger su un dominio limitato, e vari lavori di Payne e Philippin, dove sono studiati principi di massimo relativi a diverse combinazioni di funzione e gradiente, tra i quali citiamo [6].

Veniamo ora ai contributi originali presenti nella tesi: ci siamo posti lo scopo di considerare non più insiemi limitati ma domini esterni, dove cioè Ω sia il complementare di un aperto limitato. Un primo passo [7] è stato quello di studiare il seguente problema:

$$\begin{aligned} &div(|Du|^{p-2} Du) = 0 \quad \text{in } \Omega = \Omega_0 \backslash \Omega_1 \\ &u = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = c_1 > 0 \quad \text{su } \partial\Omega_1 \\ &u = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = c_0 > 0 \quad \text{su } \partial\Omega_0. \end{aligned} \tag{5}$$

dove Ω è un anello limitato consistente nella differenza tra due domini limitati concentrici in R^n: $\Omega = \Omega_0 \backslash \Omega_1$, η è la normale interna a $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_0$ rispettivamente.

Rifacendoci a [6], abbiamo studiato la funzione:

$$P = \frac{|Du|^p}{u^{\frac{p(n-1)}{(n-p)}}} \tag{6}$$

abbiamo ottenuto che risulta costante quando u è soluzione del problema, e abbiamo dimostrato in base a ciò che la sola soluzione è data quando il dominio ha simmetria sferica, con i raggi delle palle legati opportunamente alle costanti presenti nelle condizioni al bordo. Come ulteriore risultato, non è richiesta nel nostro procedimento regolarità a priori del bordo. Le soluzioni sono intese inizialmente in senso debole, cioè appartenenti alla classe $W^{1,p}(\Omega)$ e le condizioni al bordo sono intese nel seguente senso debole: dato $\varepsilon > 0$, esistono due aperti $U_{1,\varepsilon}$ contenente $\partial\Omega_1$, $U_{0,\varepsilon}$ contenente $\partial\Omega_0$ tali che:

$$\begin{aligned} &|1-u| < \varepsilon\,, \quad ||Du| - c_1| < \varepsilon \quad \text{a.e. } x \in U_{1,\varepsilon} \cap \Omega \\ &|u| < \varepsilon\,, \quad\quad\; ||Du| - c_0| < \varepsilon \quad \text{a.e. } x \in U_{0,\varepsilon} \cap \Omega \end{aligned} \tag{7}$$

rispetto alla misura di Lebesque n-dimensionale L^n. A tal fine ci siamo rifatti a risultati di regolarità della frontiera libera che fanno capo al lavoro di Caffarelli. Una prova alternativa del risultato, nel caso di dominio regolare, è ottenuta in [1] mediante il metodo dei piani mobili.

Siamo poi passati al caso esterno, abbiamo cioè considerato [4] l'equazione (5) sul complementare di un aperto limitato Ω, con le seguenti condizioni al bordo:

$$u = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = c_1 > 0 \quad \text{su } \partial\Omega \tag{8}$$

$$u \to 0 \quad \text{per } |x| \to \infty \tag{9}$$

Le condizioni al bordo sono ancora intese nel senso debole precisato dalle (7). Al fine di usare un metodo tipo Weinberger per dimostrare che Ω deve essere una palla, e dunque la soluzione a simmetria radiale, abbiamo dovuto investigare l'esatto comportamento di u, Du per $|x| \to \infty$. Abbiamo ottenuto che sono asintotiche rispettivamente alla soluzione fondamentale del p-laplaciano con polo nell'origine ed al suo gradiente. Tali proprietà, oltre che permetterci di concludere il nostro risultato, sono interessanti di per sè e sono state ottenute combinando un metodo di «blow up» per funzioni p-armoniche con una opportuna versione del teorema di confronto.

Abbiamo infine considerato un problema parabolico esterno [5]: precisamente l'equazione (3) su $\Omega \times (0, T)$, dove Ω è il complementare di un aperto limitato in

$\mathbf{R}^n$, con le seguenti condizioni al contorno ed iniziali:

$$u(x, t) = f(t); \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = g(t) \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, T)$$

$$u = 0 \quad \text{per } t = 0$$

$$u \to 0 \text{ uniformemente in } t \text{ per } |x| \to \infty$$

$0 \leq u \leq f(t)$

con η normale esterna a $\partial\Omega$, $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $g > 0$ per almeno un valore $\bar{t} \in (0, T)$; f and g soddisfacenti alcune condizioni naturali di crescita e di regolarità . Con il metodo dei piani mobili abbiamo provato che una soluzione di questo problema deve avere simmetria radiale rispetto ad x e che Ω deve essere il complementare di una palla in $\mathbf{R}^n$. Questo risultato si può applicare in particolare all'equazione del calore, e sembra nuovo anche in questo contesto, dimostrando che l'unica possibile soluzione, nelle nostre ipotesi, è data dal nucleo di Gauss-Weierstrass.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALESSANDRINI A. *A symmetry problem for condensers*, Math. Meth. Appl. Sci., **15** (1992), 315-320.

[2] ALESSANDRINI A. and GAROFALO N., *Symmetry for degenerate parabolic equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **108** (1989), 161-174.

[3] CAFFARELLI L., GAROFALO N. and SEGALA F., *A gradient bound for entire solutions of quasilinear equations and its consequences*, Comm. Pure Appl. Math., **XLVII** (1994), 1457-1473.

[4] GAROFALO N. and SARTORI E., *Symmetry in exterior boundary value problems for quasilinear elliptic equations via blow up and a priori estimates*, Diff. & Int. Eqns, in corso di stampa.

[5] GAROFALO N. and SARTORI E., *Radial symmetry in a free boundary problem for degenerate parabolic equations in unbounded domains*, preprint, Università di Padova.

[6] PHILIPPIN G., *On a free boundary problem in electrostatic*, Math. Methods Appl. Sci., **12** (1990), 387-392.

[7] SARTORI E., *On a free boundary problem for the p-laplacian*, J. Math. Ana. Appl., **218** (1998), 117-126.

[8] SERRIN J., *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **43** (1971), 304-318.

[9] WEINBERGER C., *Remark on a preceding paper by Serrin*, Arch. Rat. Mech. Anal., **43**, (1971), 319-320.

Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Università di Padova
e-mail: sartori@math.unipd.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Padova) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. Nicola Garofalo, Università di Padova