Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Daniele Morbidelli

Spazi frazionari di tipo Sobolev per campi vettoriali e operatori di evoluzione di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 123–126.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 123-126

Spazi frazionari di tipo Sobolev per campi vettoriali e operatori di evoluzione di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck.

DANIELE MORBIDELLI

1. – Spazi di Sobolev associati a campi di Hörmander.

Siano $X_1, \ldots, X_m$ campi vettoriali di classe C^∞ su $\mathbf{R}^N$, $X_j = \sum_{k=1}^{N} a_{j,k}(x)\,\partial/\partial x_k$, $a_{j,k} \in C^\infty$. Si dice che i campi soddisfano l'ipotesi di Hörmander se, per ogni punto $x \in \mathbf{R}^N$ esiste un intero r tale che

$$\operatorname{span}\{X_{[I]}(x) : |I| \leq r\} = \mathbf{R}^N, \tag{1}$$

Qui $I = (i_1, \ldots, i_p)$ indica un multi indice a valori in $\{1, \ldots, m\}$, $|I| = p$ e $X_{[I]}$ indica il commutatore $[X_{i_1}, [X_{i_2} \cdots [X_{i_{p-1}}, X_{i_p}] \cdots]]$.

Hörmander ha provato nel 1967 che se (1) è soddisfatta, allora l'operatore differenziale del secondo ordine $\sum X_j^2$ è ipoellittico (ogni soluzione u di $\sum X_j^2 u = 0$ è di classe C^∞).

Tutti gli operatori ellittici del secondo ordine in forma di divergenza a coefficienti regolari, $L = \operatorname{div}(A(x)\nabla)$ possono essere scritti nella forma $L = \sum X_j^* X_j$, dove $X_j^* = -X_j - \operatorname{div}(\mathrm{X_j})$ indica l'aggiunto formale di X_j. La classe degli operatori di Hörmander è però ben più ampia. Basti pensare all'esempio $X_1 = \partial_{x_1}$, $X_2 = x_1 \partial_{x_2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. In questo caso l'operatore «somma di quadrati» corrispondente è $L = \partial_{x_1}^2 + x_1^2 \partial_{x_2}^2$, che non è ellittico in $x_1 = 0$. Risulta però $[X_1, X_2] = \partial_{x_2}$. Quindi la condizione (1) è soddisfatta ed L è ipoellittico.

Un notevole impulso allo studio delle equazioni a derivate parziali associate a famiglie di campi vettoriali come generalizzazione delle equazioni ellittiche del secondo ordine è stato dato dai risultati dei lavori di Nagel, Stein e Wainger [4] e Jerison [1] (si veda [3] per una bibliografia recente sull'argomento). L'idea chiave dei lavori [4] e [1] è quella di associare a ogni famiglia di campi una distanza su $\mathbf{R}^N$ definita a partire dai campi stessi. Precisamente, per ogni coppia x e y di punti si definisce

$$d(x, y) = \inf\Big\{ r > 0 : \exists \gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^N,\ \dot\gamma(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j(t)\, X_j(\gamma(t)),$$

$$|a_j(t)| \leq r^{d(X_j)},\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y \Big\}$$

e $B(x, r) = \{y : d(x, y) < r\}$. Molte proprietà significative della distanza d sono descritte da Nagel Stein e Wainger.

C'è inoltre una ricca letteratura recente sugli spazi di Sobolev di ordine 1 definiti dalla norma

$$\|u\|_{W_X^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|X_j u\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2}$$

che sembrano essere le naturali generalizzazioni al contesto degenere degli spazi di Sobolev $W^{1,p}$.

Lo scopo della tesi è quello di dare alcune proprietà di una famiglia di spazi che sono «intermedi» tra L^p e $W_X^{1,p}$. Una (semi)norma ragionevole di ordine s, $0 < s < 1$, potrebbe essere scritta come la somma delle derivate frazionarie lungo i campi:

$$[u]_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\sum_{j=1}^{m} \int_\Omega dx \int_{\{e^{tX_j}(x) \in \Omega\}} \frac{dt}{|t|^{1+ps}} \, |u(e^{tX_j}(x)) - u(x)|^p \right)^{1/p}, \tag{3}$$

dove Ω è limitato, $1 \leq p < \infty$ e $t \mapsto e^{tX_j}(x)$ indica la curva integrale del campo X_j uscente da x a $t = 0$.

Uno dei risultati della tesi è la prova del fatto che la norma (3) è localmente equivalente alla seguente

$$[u]^*_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x, y)^{ps} \, |B(x, d(x, y))|} \, dx dy \right)^{1/p}. \tag{4}$$

In (4) d indica la distanza precedentemente introdotta e $|B|$ è la misura di Lebesgue della d-palla B. Questo risultato di equivalenza prova che la norma (3) è essenzialmente determinata solo dalla distanza d.

Risulta evidente che molte informazioni sulla norma (4) sono strettamente legate alla conoscenza delle proprietà della distanza d. In particolare lo strumento principale nella prova dell'equivalenza tra le due norme consiste in un teorema di struttura per le sfere della metrica d. Il risultato è una versione modificata di un teorema classico di Nagel, Stein and Wainger [4, Theorem 7]. In termini euristici, si prova che per ogni palla $B = B(x, r)$, esiste un diffeomorfismo E di classe C^1 definito in un intorno dell'origine in $\mathbf{R}^n$ tale che

$$E(c_1 Q) \subseteq B \subseteq E(c_2 Q),$$

dove Q è una scatola opportuna in $\mathbf{R}^n$, c_1 e c_2 sono costanti positive mentre $c_j Q := \{c_j x : x \in Q\}$ è la scatola «dilatata».

La novità rispetto al risultato di Nagel, Stein e Wainger, risiede in una diversa scelta delle mappe «esponenziali» E. La proprietà saliente delle suddette mappe consiste nel fatto che esse sono fattorizzabili come composizione di un numero finito di traslazioni lungo i campi X_j. Per una descrizione rigorosa del teorema rimandiamo alla tesi o a [3, Theorem 3.1].

Osserviamo anche che i risultati di [3] consentono di dare una nuova dimostrazione della disuguaglianza di Poincaré di Jerison [1]:

$$\int_B |u(x) - u_B|\, dx \leqslant cr \int_B \sum_{j=1}^{m} |X_j u|, \tag{5}$$

dove $B = B(x_0, r)$ è una palla rispetto alla distanza d ed $u_B = |B|^{-1} \int_B u$ indica la media sulla palla. Per questo risultato e per uno schema generale di dimostrazione della disuguaglianza di Poincaré per campi vettoriali rimandiamo al lavoro [2].

Viene inoltre provato nella tesi un risultato di immersione del tipo

$$[u]_{W^{s,q}(\Omega)} \leqslant c \|Xu\|_{L^p(\Omega)}, \qquad u \in C_0^\infty(\Omega), \tag{6}$$

dove $p > 1$ mentre $q > p$ è un esponente opportuno. La prova di questo risultato riposa sulle stime della soluzione fondamentale per un operatore di Hörmander (contenute in [4]).

2. – Operatori ultraparabolici.

La seconda parte della tesi contiene lo studio di alcune proprietà di operatori parabolici del tipo seguente

$$L = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}\, \partial_{x_i, x_j} + Y, \tag{7}$$

ove (a_{ij}) è una matrice a coefficienti hölderiani definita positiva in $\mathbf{R}^{p_0}$, $1 \leqslant p_0 \leqslant n$, Y è l'operatore

$$Y := \langle x, B\nabla_x \rangle - \partial_t, \qquad (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \tag{8}$$

e B è una matrice avente una struttura a blocchi del tipo

$$B = \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & B_r \\ * & * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \tag{9}$$

dove B_j è un blocco $p_{j-1} \times p_j$ di rango massimo e $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_r$, $p_0 + \cdots + p_r = n$, mentre i blocchi « $*$ » sono costanti e arbitrari. Il modello più semplice della classe presa in esame è l'operatore di Kolmogorov in $\mathbf{R}^3$, $L = \partial_x^2 + x\partial_y - \partial_t$. Congelando i coefficienti a_{ij} in un punto fissato z_0, l'operatore L diventa di tipo Hörmander e ha una soluzione fondamentale di classe C^∞ nel complementare della diagonale, che si può scrivere in termini espliciti. Ciò consente di applicare il metodo della parametrice di E. E. Levi, per costruire e stimare, localmente e globalmente, la soluzione fondamentale, in una striscia $\mathbf{R}^n \times]0, T[$, $T > 0$ opportuno.

La tecnica usata è simile a quella usata da Polidoro [5] e si basa sull'uso sistematico della particolare struttura di gruppo di Lie associata alla matrice B in (7), rispetto alla quale Y è invariante per traslazione a sinistra. La novità sostanziale, rispetto al lavoro [5], risiede nel fatto che i blocchi «$*$» nella matrice (7), qui non vengono supposti tutti uguali a zero. Questo fa sí che l'operatore Y non sia più omogeneo rispetto al gruppo di dilatazioni che in [5] giocava un ruolo fondamentale. Questa difficoltà è aggirata sfruttando l'equivalenza asintotica, vicino al polo, tra le soluzioni fondamentali dei due operatori

$$L = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}\, \partial_{x_i, x_j} + Y\,,$$

$$L_0 = \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{ij}\, \partial_{x_i, x_j} + Y_0\,,$$

ove Y_0 si ottiene da Y annullando in (9) tutti i blocchi «$*$», mentre i coefficienti a_{ij} sono costanti.

La precisa stima della soluzione fondamentale Γ e di alcune sue derivate, ottenute nella tesi, consentono di dimostrare una disuguaglianza di Harnack per le soluzioni non negative di $Lu = 0$, utilizzando, come in [5], opportune formule di media sugli insiemi di livello di Γ.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. Jerison, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition*, Duke Math. J., **53** (1986), 503-523.

[2] E. Lanconelli and D. Morbidelli, *On the Poincaré inequality for vector fields*, preprint 1998.

[3] D. Morbidelli, *Fractional Sobolev norms and structure of Carnot-Carathéodory balls for Hörmander vector fields*, preprint 1998.

[4] A. Nagel, E. M. Stein and S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math., **155** (1985), 103-147.

[5] S. Polidoro, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, Le Matematiche, **XLIX** (1994), 53-105.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e.mail: morbidel@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Bologna) - Ciclo IX
Direttore di ricerca: Prof. E. Lanconelli, Università di Bologna