Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Elisa Francini

Sugli insiemi di livello di soluzioni di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico e parabolico

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **2-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1999), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 107–110.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1999_8_2A_1S_107_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1999.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 2-A Suppl. (1999), pag. 107-110

Sugli insiemi di livello di soluzioni di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico e parabolico.

ELISA FRANCINI

In questa tesi si sono studiate equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico e parabolico con lo scopo di capire in che modo i dati di un problema al contorno influenzano la soluzione e i suoi insiemi di livello. In particolare, abbiamo focalizzato l'attenzione su: 1) problemi di tipo Dirichlet per equazioni ellittiche e paraboliche e 2) problemi di Cauchy non caratteristici per equazioni paraboliche.

Nel primo caso abbiamo studiato come i dati determinano la forma gli insiemi di livello. Per i problemi trattati nella seconda parte, invece, abbiamo analizzato la dipendenza dai dati di Cauchy delle soluzione e di alcune particolari linee di livello.

1. – Stellarità degli insiemi di livello.

La geometria delle soluzioni rappresenta una parte recente della teoria delle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Lo scopo è quello di vedere in che modo la geometria del dominio, la struttura dell'equazione e la topologia del dato al bordo determinano proprietà della soluzione e dei suoi insiemi di livello. Un risultato tipico è il seguente ([2]): *Data $f \in C^1(\mathbf{R})$, se u è una soluzione positiva dell'equazione $\Delta u = f(u)$ in una sfera di $\mathbf{R}^n$ e si annulla sul bordo della sfera stessa, allora u è radiale.*

In questa tesi abbiamo preso in considerazione la stellarità degli insiemi di livello. Diciamo che un insieme $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ è *stellato* (rispetto all'origine) se per ogni punto $x \in \Omega$ il segmento $\{tx : t \in [0, 1)\}$ è contenuto in Ω.

Dati due aperti stellati e limitati, Ω_0 e Ω_1, tali che $\overline{\Omega}_1 \subseteq \Omega_0$, abbiamo considerato soluzioni di equazioni ellittiche non lineari, definite in $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$ e con valori costanti su $\partial\Omega_0$ e $\partial\Omega_1$. Detta u una tale soluzione ci siamo chiesti se si può concludere che gli insiemi di livello $\{u > c\}$ sono stellati e stabilire alcune relazioni quantitative riguardanti la stellarità.

Se Ω è un insieme di $\mathbf{R}^n$ con frontiera di classe C^1 e contenente l'origine, la sua stellarità si può misurare considerando, per ogni punto $x \in \partial\Omega$, l'angolo $w(x)$ che la normale esterna a $\partial\Omega$ in x forma con la direzione radiale x. Ω è stellato se $w(x) \leq \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in \partial\Omega$. I punti di massimo di w sono i punti in cui la normale si discosta maggiormente dalla direzione radiale: diremo allora che in tali punti la stellarità è minima. Se $\Omega_c = \{u > c\}$ è un insieme di livello di una funzione u tale che $Du \neq 0$ su $\partial\Omega_c$, $w(x)$ corrisponde all'angolo tra $-Du(x)$ e la direzione radiale. Questa «misura» della stellarità degli insiemi di livello di una funzione è stata introdotta da Longinetti in [5].

Le equazioni differenziali che abbiamo studiato sono del secondo ordine, ellittiche e completamente non lineari. Data una funzione $G \in C^1(\mathbf{R}^{(2n+1)} \times S^{(n)})$, dove $S^{(n)}$ è lo spazio delle matrici simmetriche $n \times n$, denotiamo ancora con G l'operatore

$$u \rightarrow G[u](x) := G(x, u(x), \nabla u(x), Hu(x))$$

dove ∇u e Hu sono, rispettivamente, il gradiente e la matrice Hessiana di u. L'operatore G si dice *ellittico* in u se la matrice

$$(G_{ij}(u, x))_{i,j=1}^n := \left(\frac{\partial G}{\partial u_{x_i x_j}} [u](x) \right)_{i,j=1}^n$$

è definita positiva per ogni $x \in \Omega$.

Inoltre diciamo che G è *invariante per rotazioni* se per ogni matrice ortogonale M e per ogni $u \in C^2(\Omega)$ si ha

$$G(M^T x, u(x), M^T \nabla u(x), M^T Hu(x) M) = G(x, u(x), \nabla u(x), Hu(x)), \quad \forall x \in \Omega .$$

Dati un operatore G e una funzione u, indichiamo con L^u l'operatore lineare definito da $L^u \phi = \sum_{i,j=1}^n G_{ij}(u, x) \phi_{x_i x_j}$.

Il risultato principale di questa sezione è il seguente:

TEOREMA 1. – *Siano Ω_0 e Ω_1 aperti stellati, limitati e con frontiera di classe C^1.*

Sia $u \in C^3(\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1) \cap C^1(\overline{\Omega}_0 \setminus \Omega_1)$ soluzione del problema

$$\begin{cases} G[u] = 0 & \text{in } \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1, \\ u_{|\partial\Omega_0} = 0, & u_{|\partial\Omega_1} = 1 . \end{cases} \tag{1}$$

tale che G è ellittico in u, $G_u[u] \leq 0$ e $0 \leq u \leq 1$ in $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$.

Supponiamo inoltre che la disuguaglianza

$$2L^u u(x) - \sum_{i=1}^n x_i G_{x_i}[u](x) + \sum_{i=1}^n u_{x_i}(x) G_{u_{x_i}}[u](x) \geq 0 , \tag{2}$$

sia verificata per ogni $x \in \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$.

Allora: $\nabla u \neq 0$ in Ω e gli insiemi di livello di u sono stellati. Inoltre, se G è invariante per rotazioni la stellarità non ha minimi interni ad $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$ a meno che Ω_0 e Ω_1 non siano sfere con centro nell'origine, nel qual caso la soluzione u è radiale.

Lo strumento principale usato per la dimostrazione di questo risultato è il Principio del Massimo. Per provare che gli insiemi di livello sono stellati, per esempio, si mostra infatti che la funzione $\langle x, \nabla u(x) \rangle$ soddisfa una equazione lineare ellittica del secondo ordine.

La generalità della forma dell'operatore G viene pagata con l'ipotesi (2). Tuttavia si possono esibire numerosi esempi di equazioni differenziali per le quali il segno dell'espressione in (2) può essere determinato a priori. L'esempio più semplice è l'equazione di Poisson $\Delta u = g(u)$ per la quale tutte le ipotesi del teorema (compresa la condizione $0 \leq u \leq 1$) sono verificate se g è non decrescente e non negativa. Rientrano in questa classe anche, per esempio, equazioni la cui parte principale è il p-Laplaciano, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{(p-2)} \nabla u)$ oppure una funzioni omogenea degli autovalori della matrice Hessiana.

Un risultato analogo vale per soluzioni di equazioni paraboliche (del tipo $u_t = G[u]$) definite in domini cilindrici della forma $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1 \times [0, T]$, con valori costanti sulle frontiere laterali e con insiemi di livello stellati per $t = 0$.

2. – Un problema di Cauchy non caratteristico.

Consideriamo una equazione lineare parabolica in una variabile spaziale

$$u_t = a(x, t)\, u_{xx} + b(x, t)\, u_x + c(x, t)\, u\,, \tag{3}$$

con condizioni di Cauchy assegnate su un segmento parallelo all'asse dei tempi,

$$u(0, t) = f(t) \quad \text{e} \quad u_x(0, t) = g(t), \qquad \text{per } t \in [0, T]. \tag{4}$$

Il problema (3)-(4), che è non caratteristico, è un modello per alcune situazioni fisiche nelle quali una parte del dominio non è accessibile. Per esempio, u può rappresentare la concentrazione di un gas che fuoriesce da una sorgente sotterranea: i dati di Cauchy sono, in questo caso, la concentrazione e il flusso di tale gas sulla superficie terrestre. Ci siamo chiesti se si può determinare, dalla conoscenza dei dati di Cauchy, il valore della soluzione u per $x > 0$ e la posizione di una particolare linea di livello di u (nel caso in cui u sia la concentrazione del gas sotterraneo, la linea di livello $\{u = 1\}$ rappresenta la posizione della sorgente).

Le difficoltà principali che si incontrano affrontando questo problema, derivano dalla sua cattiva posizione nel senso di Hadamard: infatti, la soluzione e le sue linee di livello non dipendono con continuità dai dati di Cauchy. Il problema di Cauchy non caratteristico è stato studiato da diversi autori, soprattuto nel caso in cui i coefficienti dell'equazione non dipendano dal tempo (si veda, ad esempio, [1] per l'equazione del calore oppure [3] per equazioni semilineari). La strategia che si adotta in questi lavori consiste nel ricercare soluzioni in una classe opportunamente ristretta imponendo, ad esempio, delle limitazioni a priori su alcune norme delle soluzioni. In questo ordine di idee si inseriscono i risultati qui ottenuti, per equazioni della forma (3). In questa esposizione diciamo, per semplicità che le ipotesi sui coefficienti sono le seguenti: a, b e c sono funzioni Lipschitziane in $R = [0, L] \times [0, T]$ con norme di Lipschitz limitate da una costante nota $A > 0$, inoltre $a > A^{-1}$ e $c \leq 0$ in R.

Per quanto riguarda la dipendenza della soluzione dai dati di Cauchy, abbiamo provato che se u è soluzione del problema (3)-(4) in un dominio della forma $D = \{(x, t): 0 < t < T,\ 0 < x < s(t)\}$, per una opportuna funzione continua s, e se la norma C^0 di u in D è maggiorata da una costante nota, allora u dipende con continuità dai dati di Cauchy f e g. Le norme in gioco sono la norma C^0 su sottoinsiemi di D (per u) e la norma C^0 sull'asse dei tempi per i dati di Cauchy. La dipendenza è logaritmica ed è uniforme nei compatti di $\overline{D}$ con distanza positiva dalla parte di frontiera parabolica sulla quale non sono assegnati dati, cioè dall'insieme $\{(x, 0): x \in [0, s(0)]\} \cup \{(s(t), t): t \in (0, T)\}$.

Il teorema che segue è invece un risultato di stabilità sia per una linea di livello della soluzione che per la soluzione stessa. Osserviamo che, anche se il problema di Cauchy è lineare, le linee di livello della soluzioni non dipendono linearmente dai dati di Cauchy.

TEOREMA 2. – *Per* $i = 1, 2$ *sia* $D_i = \{(x, t): 0 < t < T,\ 0 < x < s_i(t)\}$ *e sia* u_i *una soluzione dell'equazione* (3) *in* D_i *tale che* $0 < u_i < E$ *in* D_i, *e* $u_i(s_i(t), t) = E$ *per ogni* $t \in [0, T]$, *dove* E *è una costante positiva.*

Supponiamo che

$$l \leq s_i(t) \leq L \quad e \quad |s_i(t_1) - s_i(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|,$$

per $i = 1, 2$ *e per ogni* $t, t_1, t_2 \in [0, T]$, *con* l, L *e* M *costanti positive.*

Per ogni $T_1 \in (0, T)$ *e* $\beta \in (0, 1/9)$ *esiste un numero positivo* K *tale che se*

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_1(0, t) - u_2(0, t)| < \varepsilon \quad e \quad \sup_{t \in [0, T]} |(u_1)_x(0, t) - (u_2)_x(0, t)| < \varepsilon,$$

per qualche $\varepsilon > 0$, *allora,*

$$|s_1(t) - s_2(t)| < Kw(\varepsilon/E) \quad \textit{per ogni} \quad t \in [T_1, T], \quad e$$

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq KEw(\varepsilon/E) \quad \textit{per ogni} \quad (x, t) \in D_1 \cap D_2, \quad t \geq T_1,$$

dove abbiamo posto $w(\tau) = ((1 + |\log(\tau)|)^{-\beta} + \tau)$.

Entrambi questi risultati (ed altri analoghi contenuti in questa parte della tesi) sono ottenuti grazie all'uso del Principio di Massimo, alla costruzione di opportune funzioni barriera e ad un risultato di Landis (Lemma 2.5.1 in [4]) opportunamente modificato.

BIBLIOGRAFIA

[1] CANNON J. R. *The One-Dimensional Heat Equation* Addison-Wesley (1984).

[2] GIDAS B., NI W. and NIRENBERG L. *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Commun. Math. Phys., **68** (1979), 209-243.

[3] P. KNABNER and S. VESSELLA *Stabilization of ill-posed Cauchy problems for parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser., **149** (1987), 393-409

[4] E. M. LANDIS *Some questions in the qualitative theory of elliptic and parabolic equations* Transl., II. Ser., Am. Math. Soc., **20** (1962), 173-238; traduzione da Usp. Mat. Nauk, **14**, n.1 (85) (1959), 21-85.

[5] M. LONGINETTI *A Maximum Principle for the Starshape of Solutions of Nonlinear Poisson Equations*, Boll. Unione Mat. Ital., VI. Ser. **A-4** (1985), 91-96.

Istituto di Analisi Globale ed Applicazioni - CNR, Firenze
e-mail: elisa@iaga.fi.cnr.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Firenze) - Ciclo IX
Direttore della ricerca: Prof. Giorgio Talenti, Università di Firenze