

---

# BOLLETTINO

# UNIONE MATEMATICA ITALIANA

*Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura*

---

GIUSEPPE GEYMONAT

## Matematica e tecnologia: un'esperienza

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 1-A—La Matematica nella Società e nella Cultura (1998), n.3, p. 257–268.*

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1998\\_8\\_1A\\_3\\_257\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_3_257_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## **Matematica e tecnologia: un'esperienza (\*)**

GIUSEPPE GEYMONAT

### **Introduzione.**

Quando ho ricevuto l'invito a tenere una conferenza sull'argomento trattato in quest'articolo, mi sono sentito molto onorato. Mi sono poi chiesto la ragione di tale invito. Ho pensato che l'Ufficio di Presidenza dell'UMI fosse interessato alla mia esperienza un po' inusuale. In effetti, da oramai una dozzina di anni, svolgo la mia attività scientifica in un laboratorio che in Francia è considerato tipicamente afferente al settore dell'Ingegneria.

Creato nel 1975, il Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT) è un laboratorio comune (Unité Mixte de Recherche, UMR) al CNRS, all'Ecole Normale Supérieure di Cachan ed all'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Nell'ambito del CNRS esso è afferente al Département SPI (Sciences pour l'Ingénieur), sezione 09 (Mécanique, génie des matériaux, acoustique) ed analoga è l'appartenenza per il Ministero, anche perché l'ENS di Cachan ha una secolare tradizione di formazione degli insegnanti secondari delle materie tecnologiche.

Si tratta di un grosso laboratorio composto da circa 40 fra insegnanti universitari e ricercatori a tempo pieno del CNRS, 10 tecnici ed amministrativi e da 50 giovani che preparano una thèse de doctorat. Ogni thèse è finanziata con una borsa (ministeriale e/o industriale) ed ha la durata di circa tre anni e mezzo.

Nel corso degli ultimi anni, oltre agli stipendi ed alle spese generali di infrastruttura, lo stato ha versato ogni anno circa 1 milione di Franchi, mentre le risorse contrattuali sono state in media ogni anno di circa 5,5 milioni di Franchi. Fra i contraenti vi sono importanti industrie

(\*) Conferenza tenuta a Bologna il 31 maggio 1997 in occasione dell'Assemblea Ordinaria dei Soci dell'Unione Matematica Italiana.

del settore pubblico e privato: EDF, Aérospatiale, Buygues, Renault, SNECMA, PSA, ... Quando un contratto è poliennale, ad esso è, in generale, associato il finanziamento di una thèse.

L'attività di ricerca dello LMT riguarda essenzialmente la meccanica dei solidi e delle strutture. Il laboratorio è articolato in tre settori di ricerca : Mécanique et Matériaux, Structures et Systèmes, Génie civil et Environnement. Oltre ad una (piccola) biblioteca vi sono tre centri di cruciale importanza per la ricerca: il Centre d'essais, il Centre de mesures, ed il Centre de Calcul. Essi sono dotati di diverse macchine per realizzare sia prove sperimentali e misure (diverse macchine de trazione-torsione, la macchina ASTREE per delle prove triassiali, due sistemi di riscaldamento per induzione, due reometri, diversi microscopi, un microdurometro, ...) che simulazioni numeriche (una ventina di stazioni HP, altrettanti terminali X, ...). Il Centro di calcolo dispone inoltre di un calcolatore parallelo ORIGIN 2000 con 32 processori il cui acquisto è stato possibile grazie al finanziamento comune di altri laboratori e della regione Ile-de-France.

## **1. – Da dove traggono origine i temi di ricerca affrontati allo LMT?**

Imperativi tecnologici ed economici sono alla base della utilizzazione di molti materiali e strutture in condizioni che si possono dire «estreme»: basti pensare ai nuovi motori degli aerei, alle strutture che intervengono nei reattori nucleari, nelle piattaforme petrolifere operanti in mare aperto, nei razzi vettori dei satelliti, ... Inoltre nuovi materiali vengono sempre più usati non solo in applicazioni di carattere industriale, ma anche per la costruzione di svariati oggetti di uso corrente quali gli attrezzi sportivi per sci, tennis, nautica,...

Tali utilizzazioni sono diventate sempre più sistematiche in quanto la conoscenza dei materiali usati si è trasformata da conoscenza empirica in conoscenza scientifica da almeno due punti di vista. Da un lato si è appreso a controllare alcune delle caratteristiche dei materiali adattando opportunamente il processo di fabbricazione e d'altro lato si è anche imparato a simulare

numericamente il comportamento di strutture reali per prevederne l'evoluzione nel corso della loro utilizzazione.

Prevedere l'utilizzazione ed intervenire nel processo di fabbricazione significa tener conto di meccanismi almeno parzialmente o praticamente irreversibili quali le trasformazioni di origine termomeccanica o chimica, il danneggiamento per invecchiamento, la rottura,...

Per trattare tali fenomeni si costruisce un modello in generale continuo, anche se lo sviluppo dei calcolatori permette talvolta di considerarne uno discreto. In tale modello lo stato del materiale è definito da un insieme di variabili (scalari, vettoriali, tensoriali) che quantificano i diversi meccanismi che si vogliono prendere in considerazione.

Non voglio entrare in questa sede in considerazioni generali sulla modellizzazione. Mi limito a notare che la termodinamica dei continui deformabili costituisce uno strumento fondamentale nella costruzione dei modelli usati allo LMT. Scegliere le variabili di stato pertinenti ad un dato modello è il primo compito assolutamente fondamentale ed in generale non banale. In effetti la loro scelta dipende sia dal materiale studiato che dai meccanismi potenzialmente eccitati dalle sollecitazioni considerate. Inoltre l'obiettivo perseguito non è di descrivere *la* legge di comportamento del materiale in qualunque circostanza, ma più modestamente di ottenere *un* modello pertinente per le sollecitazioni considerate.

Allo LMT la scelta del modello (che deve ovviamente essere compatibile con i principi della termodinamica) è condizionata da due vincoli:

- i) la possibilità di implementare il modello fenomenologico in un codice di calcolo numerico (in generale agli elementi finiti);
- ii) la possibilità di identificare mediante opportuni esperimenti i coefficienti fenomenologici che sono utilizzati.

Al momento di scegliere il modello la prima questione cruciale cui si deve rispondere è la seguente: quale livello di descrizione usare? in altre parole: quale scala usare per esaminare i fenomeni? Ad esempio quando si utilizza un approccio fenomenologico «elementa-

re» ci si basa essenzialmente su esperienze effettuate sul cosiddetto *elemento di volume*. Si tratta, per semplificare, di un cubo di materiale abbastanza grande da poter essere considerato «omogeneo e non influenzato dalle fluttuazioni locali» e peraltro abbastanza piccolo affinché «le derivate parziali usate abbiano ancora un senso». Per quantizzare tale elemento di volume ci si può riferire ad una tabella di J. Lemaitre, J. L. Chaboche<sup>(1)</sup>, p. 72.

La (termo-)meccanica dei solidi deformabili utilizza quali variabili di stato osservabili : (i) *la deformazione*, quantità tensoriale che misura il cambiamento locale della forma del corpo per effetto delle forze applicate; (ii) *lo sforzo*, quantità tensoriale che in ogni punto misura, per ogni direzione  $\mathbf{n}$ , la forza esercitata sul piano ortogonale ad  $\mathbf{n}$ ; (iii) *la temperatura*.

Per descrivere a livello «macroscopico» comportamenti complessi quali i comportamenti irreversibili tali variabili non sono sufficienti e quindi si introducono delle variabili di stato supplementari non direttamente osservabili dette *variabili interne*. Esse descrivono, a livello «macroscopico», l'effetto indotto dalle variazioni avvenute ad una scala più piccola. Come osserva S. Nemat-Nasser si tratta di una descrizione macroscopica «nel senso che possono esistere molti (e di fatto probabilmente infiniti) microstati che corrispondono al medesimo valore di tali variabili. Tuttavia, fintantoché tali variabili sono caratterizzate da relazioni costitutive che coinvolgono parametri, i cui valori sono determinati mediante opportuni esperimenti macroscopici, esse traducono i principali aspetti fenomenologici dei cambiamenti microstrutturali.»<sup>(2)</sup> Utilizzando le diverse variabili di stato (osservabili e non osservabili) si costruiscono le leggi di comportamento caratteristiche del modello.

La scelta e la misura (ovviamente indiretta) delle variabili interne è fondamentale. Lo scopo di un approccio fenomenologico «critico» è proprio quello di individuare in maniera ottimale i meccanismi e le

<sup>(1)</sup> J. LEMAITRE - J. L. CHABOCHE, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Parigi, 1985.

<sup>(2)</sup> S. NEMAT NASSER, *On Nonequilibrium Thermodynamics of Continua*, in *Mechanics Today*, S. Nemat-Nasser ed., vol. 2, Academic Press, New York, 1975, p. 94-158, la cit. è a pag. 110.

interazioni che, ad una «scala più piccola», sono significativi nel processo di produzione e/o in situazioni estreme. Come osserva sempre Nemat-Nasser, «la scelta delle variabili interne rappresenta un problema arduo. Uno sperimentatore può registrare certi «ingressi» e misurare certe «uscite». Il materiale rappresenta allora una scatola nera, la cui struttura interna si manifesta attraverso tali relazioni di entrata-uscita. La scelta ottimale delle variabili interne, in numero minimo e che forniscono il massimo di informazione per un dato insieme di entrate-uscite, costituisce un problema interessante e che esula dall'ambito della termodinamica. La termodinamica può solo fornire il quadro generale entro il quale operare. Tuttavia, la scelta precisa delle variabili interne deve essere guidata da altre considerazioni».

La «scala più piccola» che viene analizzata per scegliere le variabili interne è in generale quella delle eterogeneità. Per individuare a tale livello i meccanismi elementari significativi è utile:

(i) conoscere la cosiddetta *microstruttura* (ad es. per le leghe metalliche la struttura cristallina, le dislocazioni,...; per i materiali compositi le caratteristiche della matrice e delle microfibre e/o degli strati; per i calcestruzzi la forma ed il tipo dei granuli di inerte,...);

(ii) prevedere l'effetto delle impurità e/o delle fluttuazioni locali;

(iii) valutare l'influenza sul comportamento globale di quegli effetti termici, chimici, magneto-elettrici, ... che influiscono sulla evoluzione della microstruttura.

Appare qui una distinzione a mio avviso importante nella costruzione dei modelli. Si può infatti cercare di costruire un modello avente un carattere essenzialmente *predittivo* e cioè volto a fornire delle informazioni *quantitative* sulla situazione in esame. Tale modello permette (o dovrebbe permettere) di individuare il comportamento finale della struttura considerata (tipicamente le proprietà relative alla sua tenuta in servizio). Diventa allora possibile suggerire delle modifiche alla sua concezione (sia nel disegno che nella scelta dei materiali) ovvero gli interventi più opportuni per ripararla.

Un modello *interpretativo* ha in generale finalità diverse. Il suo scopo è individuare qualitativamente i fenomeni più importanti ed i parametri più significativi per il comportamento del materiale e/o della struttura.

Le due finalità non sono antagoniste ma piuttosto complementari. Per esempio, nel corso degli ultimi anni si è sviluppato, in particolare allo LMT, un approccio fenomenologico «critico» per lo studio del comportamento di un materiale. Con esso si cerca innanzitutto di valutare, almeno qualitativamente, l'importanza e le mutue interazioni dei diversi meccanismi elementari. A tal fine si utilizzano, se possibile in modo complementare:

- (i) esperienze di laboratorio;
- (ii) simulazioni numeriche;
- (iii) configurazioni «semplici» che consentano di effettuare dei calcoli analitici;
- (iv) situazioni «semplici» che possano essere analizzate con strumenti matematici eventualmente sofisticati.

In funzione dei risultati, anche solo qualitativi, ottenuti si potrà quindi decidere se e come prendere in considerazione tali meccanismi nella costruzione del modello fenomenologico macroscopico. Per questo motivo i modelli di tipo interpretativo hanno una grande importanza proprio nella scelta delle variabili interne.

## 2. – Alcune leggi costitutive utilizzate allo LMT.

**2.1.** Seguendo una tradizione accettata e nota come metodo dello stato locale, si *postula* che lo stato termodinamico del materiale considerato in un punto  $P$  ed a un istante dato  $t$  sia completamente determinato dalla conoscenza dei valori in quell'istante di un certo numero di variabili dipendenti solamente da  $P$ . Nel cosiddetto ambito delle piccole perturbazioni, le variabili utilizzate sono (per esempio, ma modelli più generali sono anche usati): la densità ( $\rho$ ), il tensore delle deformazioni  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ , il tensore degli sforzi  $\sigma = (\sigma_{ij})$ , la temperatura assoluta ( $T$ ), l'entropia specifica ( $s$ ), l'energia libera speci-

fica di Helmholtz ( $\psi$ ), il vettore corrente di calore ( $\mathbf{q}$ ), le variabili interne  $\alpha$  (che possono avere carattere scalare, vettoriale, tensoriale). Tali variabili devono ovviamente essere compatibili con la sollecitazione termomeccanica esterna nel senso che devono verificare le classiche equazioni della meccanica dei continui (conservazione della massa, equilibrio, principi della termodinamica). A tali equazioni vanno aggiunte le *leggi costitutive* che caratterizzano il modello considerato.

Per formulare tali leggi, si scelgono quali variabili di stato indipendenti<sup>(3)</sup>:  $\varepsilon$ ,  $T$ ,  $\alpha$ ,  $\mathbf{g} = \text{grad } T$  e si definiscono le altre variabili ( $\sigma$ ,  $\psi$ ,  $s$ ,  $\mathbf{q}$ ) come funzioni (sufficientemente regolari) di  $(\varepsilon, T, \alpha, \mathbf{g})$ . Sotto ipotesi molto generali il secondo principio impone le seguenti restrizioni su tali funzioni:

(i)  $\sigma$ ,  $\psi$ ,  $s$  dipendono solo da  $\varepsilon$ ,  $T$ ,  $\alpha$ ;

(ii)  $\psi$  determina  $s$  e  $\sigma$  mediante le leggi di stato  $s = -\frac{\partial\psi}{\partial T}$  e

$$(1) \quad \sigma = \rho \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon};$$

(iii)  $\psi$  è indipendente da  $\alpha$  (e quindi l'introduzione delle variabili interne è sostanzialmente inutile) oppure deve esistere una funzione  $h(\varepsilon, T, \alpha, \mathbf{g})$  tale che l'evoluzione temporale di  $\alpha$  è determinata dall'equazione differenziale<sup>(4)</sup>:

$$(2) \quad \dot{\alpha} = h(\varepsilon, T, \alpha, \mathbf{g}).$$

Inoltre la scelta delle equazioni costitutive della classe di materiali considerata, e cioè la scelta delle funzioni  $\psi(\varepsilon, T, \alpha)$ ,  $\mathbf{q}(\varepsilon, T, \alpha, \mathbf{g})$  ed  $h(\varepsilon, T, \alpha, \mathbf{g})$ , deve essere fatta in modo da verificare il secondo principio che si scrive a questo punto nella forma seguente:  $d_1 + d_2 \geq 0$  ove la dissipazione intrinseca  $d_1$  e la dissipazione termica  $d_2$

<sup>(3)</sup> Altre scelte sono possibili.

<sup>(4)</sup> Con notazione usuale la derivata rispetto al tempo  $t$  è indicata con un punto ed i prodotti scalari di vettori o tensori con  $\cdot$ .

sono definite da

$$d_1 = -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \cdot h, \quad d_2 = -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{T}.$$

In generale, si impongono le condizioni più restrittive  $d_1 \geq 0$  e  $d_2 \geq 0$  ove la seconda è soddisfatta grazie alla usuale legge di Fourier.

**2.2.** Le forze termodinamiche associate alle variabili interne  $\alpha$  sono definite da  $\mathbf{A} = -\varrho(\partial\psi/\partial\alpha)$ . Il comportamento irreversibile, dato dall'evoluzione delle variabili interne, ha luogo quando tali forze raggiungono il bordo del dominio di reversibilità, in generale dipendente dal valore attuale di  $\alpha$ ,  $C(\alpha) = \{\mathbf{A}: f(\mathbf{A}, \alpha) \leq 0\}$  ed allora

$$(3) \quad \dot{\alpha} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{A}}$$

ove  $F(\mathbf{A}, \alpha)$  rappresenta il potenziale inelastico ed il moltiplicatore  $\lambda$  verifica le relazioni di complementarità di Kuhn-Tucker:

$$\lambda \geq 0, \quad f(\mathbf{A}) \leq 0, \quad \lambda \dot{f}(\mathbf{A}) = 0.$$

L'ultima relazione, detta anche relazione di consistenza, permette di calcolare il valore del moltiplicatore. Le funzioni  $f$  ed  $F$  sono naturalmente scelte in modo da verificare la condizione  $d_1 \geq 0$ .

Lo studio dell'equazione differenziale (3) (esistenza, unicità, comportamento asintotico) fornisce delle indicazioni preziose sull'interesse del modello adottato. Di particolare importanza è lo studio della dipendenza dal dato iniziale. In effetti, essendo in generale poco noto, esso viene spesso assunto uguale a zero.

**ESEMPIO 1** (comportamento elastoplastico). – Si suppone che la deformazione totale  $\varepsilon$  sia decomposta in modo additivo in una deformazione reversibile (od elastica)  $\varepsilon^e$  ed in una deformazione anelastica  $\varepsilon^{an}$  (per cui  $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^{an}$ ) e che nello spazio degli sforzi esista un dominio (detto dominio elastico) all'interno del quale il comportamento è completamente reversibile:  $C = \{\mathbf{A} = (\sigma, \vartheta, R); f(\mathbf{A})J_2(\sigma + \vartheta) + R - \sigma_Y \leq 0\}$  ove  $\sigma_Y > 0$  è una costante caratteri-

stica del materiale e  $J_2(\delta) = \sqrt{(3/2) \delta^D \cdot \delta^D}$  denota il secondo invariante del tensore simmetrico, detto deviatore di  $\delta$ ,  $\delta^D = \delta - (1/3)(tr\delta) I$ . Una scelta conveniente della funzione  $\psi$  è la seguente:

$$\varrho\psi(\varepsilon, \varepsilon^{an}, \beta, p) = \frac{1}{2} E(\varepsilon - \varepsilon^{an}) \cdot (\varepsilon - \varepsilon^{an}) + k(\beta) + h(p).$$

Le variabili interne sono pertanto:  $\varepsilon^{an}$ ,  $\beta$  e  $p$  e le forze termodinamiche loro associate sono:

$$\begin{aligned} -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^{an}} &= E(\varepsilon - \varepsilon^{an}) = \varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = \sigma, \\ -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \beta} &= -\frac{\partial k}{\partial \beta} = \vartheta, \quad -\varrho \frac{\partial \psi}{\partial p} = -\frac{\partial h}{\partial p} = R. \end{aligned}$$

**ESEMPIO 2** (elasticità con danneggiamento). – In questo caso viene introdotta una variabile interna scalare  $D$ ,  $0 \leq D \leq D_c$  che descrive il processo di danneggiamento del materiale. I modelli più semplici corrispondono a:

$$\varrho\psi(\varepsilon, D) = \frac{1}{2} g(D) E \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon, \quad F(Y, D) = f(Y, D) = Y - a(D)$$

ove  $Y = -\varrho(\partial\psi/\partial D)$ . La funzione  $g(D)$  è decrescente e verifica  $0 \leq g(D) \leq 1$ ,  $g(0) = g'(0) = 1$  e  $g(D)$  tende a zero quando  $D$  tende a  $D_c$ . La funzione  $a(D)$  è crescente e verifica  $a(D) \geq 0$ .

**2.3.** Una volta scelto il tipo di modello di comportamento diventa essenziale identificare lo stato iniziale ed i coefficienti che intervengono nella legge costitutiva. Si tratta, negli esempi precedenti, del tensore elastico  $E$ , della costante  $\sigma_Y$  e delle funzioni  $k$ ,  $h$ ,  $g$  ed  $a$ . Quali esperimenti devono essere realizzati per determinare tali caratteristiche del materiale? In astratto la risposta pare semplice. All'elemento di volume, o solo ad una parte della sua superficie, si applicano delle forze (ovvero si impongono degli spostamenti) aventi una evoluzione spazio-temporale perfettamente nota. In corrispondenza si misura l'evoluzione delle deformazioni (e/o degli sforzi, e/o degli spostamenti, ...) durante un tempo sufficientemente lungo.

Nella realtà la situazione è assai più complicata, in quanto l'elemento di volume è solo una piccola parte di una provetta alle cui estremità vengono applicate delle forze (ad es. di trazione o di torsione). La provetta diventa allora essa stessa una «struttura» la cui concezione ha una importanza cruciale nella prova sperimentale e richiede una grande competenza (ed in generale numerose simulazioni sul calcolatore). Inoltre, la misura degli spostamenti e/o delle rotazioni può avvenire solo su una parte della superficie della provetta attraverso opportune griglie.

Per questi motivi si tenta in generale di restringere il campo delle sollecitazioni sulla parte «utile» della provetta a situazioni relativamente semplici: trazione, torsione, flessione, ... Inoltre, come ho già osservato, siccome lo stato iniziale è generalmente ignoto, esso viene arbitrariamente assunto uguale a zero.

Senza entrare in ulteriori dettagli, voglio solo ricordare quella che è una regola di correttezza scientifica generalmente adottata: *dopo avere identificato i coefficienti del modello grazie ad un certo numero e tipo di prove, si deve accertare il carattere predittivo o interpretativo del modello in situazioni sperimentali nuove rispetto alle prove usate per l'identificazione.*

**2.4.** Un secondo requisito fondamentale per la scelta del modello è quello della possibilità di implementazione in un codice di calcolo numerico del tipo elementi finiti. Per ogni punto di integrazione di Gauss di un elemento, si tratta dunque di discretizzare la relazione differenziale (3). Ciò può essere fatto con diverse strategie, che in ogni caso richiedono anche una proiezione sul convesso  $C$ . Una accurata analisi delle loro proprietà può essere di notevole utilità. In effetti i problemi importanti da risolvere sono problemi che riguardano il comportamento globale di una «struttura». Si tratta quindi di equazioni a derivate parziali non lineari. In generale vi sono zone della struttura nelle quali (ad un determinato istante) il materiale ha ancora (o di nuovo) un comportamento reversibile ed altre nelle quali esso ha un comportamento irreversibile.

Quando la soluzione numerica approssima bene la soluzione del problema originale? La risposta dipende ovviamente dalla possibili-

tà di dimostrare che il problema iniziale ammette, almeno localmente, esistenza ed unicità della soluzione. Tale risultato è stato dimostrato da Johnson<sup>(5)</sup> nel caso particolare dell'esempio 1 quando  $f = F$ ,  $R = h(p) = 0$  ed inoltre  $k(\beta)$  è una forma quadratica in  $\beta$  strettamente definita positiva. È tuttavia possibile costruire esempi semplicissimi<sup>(6)</sup> di problemi ai limiti ed ai valori iniziali nei quali, dopo un regime di unicità, si hanno un *numero infinito* di soluzioni.

Per rendersi conto a priori se si è pervenuti in tale regime, nel quale ovviamente nessun calcolo numerico è possibile, si studia il cosiddetto problema incrementale<sup>(6)</sup>. Derivando rispetto al tempo la relazione (1) si può esprimere, quando lo stato  $(\varepsilon, \alpha)$  è noto, la velocità  $\dot{\sigma}$  in funzione della velocità di deformazione  $\dot{\varepsilon}$  mediante un operatore  $L$ , *lineare a tratti*. In ogni punto della struttura (numericamente in ogni punto di Gauss) il valore assunto da  $L$  dipende dallo stato  $(\varepsilon, \alpha)$ . Fintantoché tale problema incrementale (che si traduce in una disequazione variazionale) ammette esistenza ed unicità si può congetturare che il problema originale ammette *localmente* una soluzione unica.

Anche quando si è in tale situazione, una questione importante nelle applicazioni, ed assai studiata allo LMT, è la «precisione» della soluzione ottenuta. Si tratta cioè di valutare, *a posteriori*, se la discretizzazione è sufficientemente accurata ovvero se, almeno nelle zone di più forte concentrazione degli sforzi, essa deve essere ulteriormente raffinata. È questo un argomento ricco di implicazioni matematiche, in quanto le usuali maggiorazioni degli errori nei metodi agli elementi finiti forniscono solo degli ordini di convergenza quando il parametro di discretizzazione tende a zero<sup>(7)</sup>

<sup>(5)</sup> C. JOHNSON, *On Plasticity with hardening*, *J. math. Anal. Appl.*, **62** (1978), pp. 325-336.

<sup>(6)</sup> A. BENALLAL - R. BILLARDON - G. GEYMONAT, *Bifurcation and Localization in Rate-independent Materials. Some General Considerations*, in *Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*, Q. S. Nguyen ed., CISM Courses and Lectures no. 327 (Springer-Verlag, Wien-New York) 1993, pp. 1-44.

<sup>(7)</sup> P. COOREVITS - P. LADEVEZE - J. P. PELLE, *An automatic procedure with a control of accuracy for finite element analysis in 2D elasticity*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **121** (1995), pp. 91-120.

### 3. – Conclusione.

Quelli che ho molto schematicamente presentato sono solo *alcuni* dei problemi matematici che si possono incontrare svolgendo attività scientifica in un laboratorio come lo LMT. La situazione non è certamente nuova. Basti ricordare quello che diceva Galileo nei Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze.

*Largo campo di filosofare agl'intelletti specolativi parmi che porga la frequente pratica del famoso arsenale di voi, Signori Veneziani, ed in particolare intorno a quella che meccanica si domanda; atteso che quivi ogni sorte di strumento e di machina vien continuamente posta in opera da numero grande d'artefici, tra i quali, e per l'osservazione fatta dai loro antecessori, e per quelle che di propria avvertenza vanno continuamente per se stessi facendo, è forza che ve ne siano de i peritissimi e di finissimo ingegno.*

L'arsenale che oggi dobbiamo praticare è costituito da numerosissimi istituti di ingegneria, biologia, economia,... Per praticarlo in maniera utile bisogna renderci conto che vi si trovano *artefici peritissimi e di finissimo discorso*. Senza rinnegare la nostra cultura e le nostre peculiarità dobbiamo però fare lo sforzo di capire i loro problemi e le loro esigenze, usando l'umiltà dell'intelligenza e l'ottimismo della nostra scienza.

Laboratoire de Mécanique et Technologie

ENS de Cachan/CNRS/ Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)  
61, Avenue du Président Wilson - 94235 CACHAN Cedex (Francia)