Bollettino Unione Matematica Italiana

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

Elena Cellurale

Problema di Stefan in spazi di Nikol'skij con peso

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 89–92.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_89_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 89-92

Problema di Stefan in spazi di Nikol'skij con peso.

ELENA CELLURALE

Oggi il termine «problema di Stefan» copre una larga classe di problemi di frontiera libera o mobile nati dalla teoria delle equazioni o dei sistemi parabolici in diversi campi della scienza. Tuttavia per sottolineare l'origine scientifica del problema usiamo la terminologia tradizionale di diffusione del calore. Infatti il problema di Stefan originario tratta della formazione del ghiaccio nei mari polari, per cui tradizionalmente rappresenta un modello matematico semplificato di transizione di fase in sistemi solido-liquido.

La tesi tratta di un problema di Stefan bifase in $\mathbb{R}^N$, problema che formalmente può essere riassunto nell'equazione parabolica singolare

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\beta(u) = 0 , \tag{1}$$

dove β è una funzione lipschitziana non decrescente. Dal punto di vista fisico u rappresenta l'entalpia, mentre $\beta(u) = \vartheta$ è la temperatura. Più in generale considereremo l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta\beta(u) + F(x, u) = 0 , \tag{2}$$

dove F è la somma di un termine continuo non decrescente o di un grafo massimale monotono e di uno lipschitziano rispetto alla variabile u.

Problemi ai valori iniziali e al contorno per (1) e (2) sono stati studiati più spesso nel caso in cui la variabile spaziale x appartenga a un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Scopo della tesi è invece lo studio del problema di Cauchy

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{3}$$

per le equazioni (1) e (2) nell'intero spazio $\mathbb{R}^N$ nell'ambito della teoria L^1. Vengono dunque riportati alcuni risultati noti della teoria dei semigruppi di contrazioni non lineari in spazi di Banach e, d'altro canto, vengono dimostrati alcuni teoremi di regolarità di tipo Nikol'skij con e senza peso. La scelta degli spazi di Nikol'skij ha un significato fisico: infatti nel caso della soluzione classica del problema di Stefan l'entalpia presenta discontinuità di tipo salto, e quindi è naturale considerare spazi che contengono funzioni siffatte.

Più precisamente la tesi si articola in cinque capitoli.

Nel primo, introdotte le notazioni usate anche in seguito, vengono richiamate le definizioni e le proprietà di alcuni sottospazi di L^1: gli spazi di tipo Nikol'skij N^λ ed $N^{\lambda, 0}$, $\lambda \in (0, 1]$, costruiti su un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o sull'intero spazio, e gli spazi di Nikol'skij con peso $N^{\lambda}(\mathbb{R}^N, w)$, dove il peso w agisce all'infinito come $|x|^{\alpha}$, con $\lambda \leqslant \alpha \leqslant 1$. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, l'appartenenza di u ad esempio a N^{λ} significa che $|h|^{-\lambda}\|u(x+h) - u(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$ è una funzione di h limitata; richiedere poi che $u \in N^{\lambda}(\mathbb{R}^N, w)$ significa imporre $uw \in N^{\lambda}$. È da osservare che nel nostro caso N^1 è lo spazio BV delle funzioni a variazione limitata.

Nel secondo e nel terzo capitolo si accenna al lavoro di Stefan. Viene dunque presentato il problema di Stefan originario, del quale (1) risulta essere di fatto la formulazione debole, da lui stesso studiato e risolto nella forma classica nel caso monodimensionale.

Nel seguito si presenta un modello per un problema di Stefan parabolico bifase in più variabili spaziali in forma classica: data una sostanza omogenea e isotropa che occupa una regione limitata Ω di $\mathbb{R}^N$ e che assuma le due fasi liquida e solida, si tratta di studiare l'evoluzione nel tempo t delle due fasi cercando di determinare la temperatura ϑ nel cilindro $\Omega \times (0, T)$, $T > 0$, e l'interfaccia $\mathcal{S}$ tra le fasi, chiamata spesso anche frontiera libera. In ipotesi di sufficiente regolarità dei dati, la nozione di soluzione classica richiede che ϑ sia continua ed $\mathcal{S}$ sia una varietà $(N-1)$-dimensionale sufficientemente regolare per ogni tempo t. A causa delle difficoltà che si incontrano nel risolvere questo problema per $N > 1$, è più opportuno dare una formulazione debole, corrispondente a (1) o (2) in un aperto limitato, che introduce come incognita la funzione entalpia u al posto della temperatura e che non contiene esplicitamente alcuna frontiera libera. Si controlla che una funzione u regolare separatamente nelle due fasi è soluzione classica se e solo se è soluzione debole del problema.

Infine gli ultimi due capitoli della tesi sono dedicati al problema di Stefan (1), (2) in tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$ con la condizione iniziale (3).

Nel quarto capitolo si descrive come esso è stato affrontato mediante la teoria dei semigruppi di contrazioni non lineari in $L^1(\mathbb{R}^N)$; diversi autori hanno studiato il problema di Stefan dal punto di vista dei semigruppi. Quindi l'equazione (1) viene trasformata nell'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{du}{dt} + Au = 0\,, \tag{4}$$

la cui incognita u è una funzione a valori in $X = L^1(\mathbb{R}^N)$, con l'operatore $A = -\Delta\beta$ e il dato $u_0 \in X$. Per studiare il problema di Cauchy astratto per (4) nello spazio di Banach X si usa la teoria dei semigruppi in spazi di Banach, dovuta in particolare a Barbu, Benilan, Brezis, Crandall ([1], [3]).

Questa teoria, di cui riportiamo i risultati principali, garantisce l'esistenza di una e una sola soluzione generalizzata di (1), (3), dal momento che si può dimostrare che l'operatore $A = -\Delta\beta$ è m-accretivo in $L^1(\mathbb{R}^N)$. La soluzione verifica l'equazione nel senso delle distribuzioni ed è limitata se il dato iniziale u_0 è anche limitato. Nel capitolo vengono anche riportati alcuni risultati della teoria dei semigruppi per la corrispondente equazione non omogenea. In particolare facendo uso della nozione di soluzione integrale si riesce a estendere al problema (2), (3) il teorema di Brezis e Crandall di unicità della soluzione ([2]), estensione che non sembra apparsa in letteratura.

Nell'ultimo capitolo, dopo un richiamo a risultati noti di regolarità della soluzione debole del problema nel caso di un aperto Ω limitato e dato iniziale appartenente a uno spazio di Nikol'skij N^{λ} o $N^{\lambda,0}$, vengono esposti risultati nuovi di regolarità Nikol'skij e Nikol'skij con peso nel caso dell'intero spazio $\mathbb{R}^N$; l'appartenenza allo spazio con peso rappresenta una sorta di condizione all'infinito.

Siccome, almeno nel caso dell'equazione (1), la regolarità Nikol'skij è immediata, trattiamo il caso degli spazi di Nikol'skij con peso considerando sia il problema (1), (3) sia il problema (2), (3).

I principali risultati dimostrati sono i seguenti

TEOREMA 1. – *Se* $0 < \lambda \leq 1$ *e* $u_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap N^{\lambda}(\mathbb{R}^N, w)$, *allora il problema* (1), (3) *ha una e una sola soluzione debole* u *tale che*

$$u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \ \cap \ C^{0,\lambda/2}([0, T];\ L^1(\mathbb{R}^N))\,;$$

$$\sup_{t>0} \operatorname{ess} \|u(\cdot, t)\|_{N^{\lambda}(\mathbb{R}^N, w)} \ < \ \infty\,;$$

$$\beta(u) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \ \cap \ L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^N))\,.$$

TEOREMA 2. – *Supponiamo* $F(x, u) = F_1(u) + F_2(x, u)$ *con*

F_1 *continua non decrescente in* $\mathbb{R}$ *ed* $F_1(0) = 0$;

F_2 *continua in* $\mathbb{R}^{N+1}$, $F_2(x, 0) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$ *e tale che* $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^N$, $u, v \in \mathbb{R}$,

$$|F_2(x, u) - F_2(y, v)| \leq L(|x - y|^{\lambda} g(x) + |u - v|)\,,$$

dove L *è una costante non negativa e* $g \in L^1(\mathbb{R}^N, w)$.

Se $0 < \lambda \leq 1$ *e* $u_0 \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap N^{\lambda}(\mathbb{R}^N, w)$, *allora il problema* (2), (3) *ha una e una sola soluzione debole* u *tale che, per ogni insieme aperto limitato* Ω *di* $\mathbb{R}^N$,

$$u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \ \cap \ C^{0,\lambda/2}([0, T];\ L^1(\Omega))\,;$$

$$\sup_{t>0} \operatorname{ess} \|u(\cdot, t)\|_{N^{\lambda}(\mathbb{R}^N, w)} \ < \ \infty\,;$$

$$\beta(u) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \ \cap \ L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^N))\,.$$

Inoltre $u \in C^{0,\lambda/2}([0, T];\ L^1(\mathbb{R}^N))$ *se* $F_1 = 0$.

Vale infine il

TEOREMA 3. – *Se l'ipotesi su* F_1 *del Teorema 2 si modifica nella seguente:* $F_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *grafo massimale monotono,* $D(F_1) = \mathbb{R}$ *e* $F_1(0) \ni 0$, *il problema* (2), (3) *ha una soluzione debole* u *tale che, per ogni insieme aperto limitato* Ω *di* $\mathbb{R}^N$,

$$u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \ \cap \ C^{0,\lambda/2}([0, T];\ L^1(\Omega))\,;$$

$$\sup_{t>0} \operatorname{ess} \|u(\cdot, t)\|_{N^{\lambda}(\mathbb{R}^N, w)} \ < \ \infty\,;$$

$$\beta(u) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0, T)) \ \cap \ L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^N))\,.$$

In questo caso u è intesa nel senso della seguente formulazione debole: Trovare $u \in L^2(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ tale che

1. $\beta(u) \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^N))$;

2. esista $\xi \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, T))$ tale che, per ogni aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^N$ $\xi(x, t) \in F_1(u(x, t))$ quasi ovunque in $\Omega \times (0, T)$;

3. per ogni $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$

$$\iint_Q \left(u \frac{\partial v}{\partial t} - \nabla\beta(u)\cdot\nabla v - (\xi + F_2(x, u))\, v \right) dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0 v\, dx = 0 \, .$$

Il problema viene affrontato con la tecnica di regolarizzazione-stime a priori-passaggio al limite, prendendo spunto da [4]. Infatti il problema viene prima approssimato con problemi regolarizzanti di tipo parabolico, dei quali è nota l'esistenza e l'unicità di una soluzione in senso classico ([5]). Stime Nikol'skij con peso per queste soluzioni classiche si ottengono poi con numerosi passaggi tecnici, resi più laboriosi dalla presenza del peso. Tale peso garantisce in compenso la compattezza dell'immersione dello spazio $N^\lambda(\mathbb{R}^N, w)$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Questa compattezza permette il passaggio al limite da cui si ricava la regolarità Nikol'skij con peso della soluzione debole. Notiamo che, per $\lambda = 1$, otteniamo la regolarità BV.

Infine vengono dimostrati risultati dello stesso tipo se gli spazi $N^\lambda(\mathbb{R}^N, w)$ sono sostituiti dai loro sottospazi $N^{\lambda, 0}(\mathbb{R}^N, w)$. Questi ultimi, al contrario degli spazi $N^\lambda(\mathbb{R}^N, w)$, risultano essere separabili e pertanto permettono di ottenere in modo standard risultati di misurabilità forte della soluzione del problema.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barbu V., *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands (1976).

[2] Brezis H. and Crandall M.G., *Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$*, J. Math. pures et appl., **58** (1979), 153-163.

[3] Crandall M.G., *Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators*, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., **45** (1986), 305-337.

[4] Magenes E., Verdi C. and Visintin A., *Theoretical and numerical results on the two-phase Stefan problem*, SIAM J. Numer. Anal., **26** (1989), 1425-1438.

[5] Oleinik O.A. and Kruzhkov S.N., *Quasi-linear second-order parabolic equations with many independent variables*, Russian Math. Surv., **16, 5** (1961), 105-146.

Indirizzo: Via C. Magenta 12, 27100 Pavia
e-mail: elena@dragon.ian.pv.cnr.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo VIII
Relatore: Prof. G. Gilardi (Università di Pavia)